高雄市樹德家商 112 學年度高三(301~319)數學科暑假作業

第一冊公式

1-1數線與絕對值：

1. 絕對值定義，若a為實數，則 $|a|=\begin{cases} a & , a\ge 0 \\ -a & , a<0 \end{cases}$

2. 絕對值不等式：設 $a\ge 0$，

   若 $|x|\le a$，則 $-a\le x\le a$

   若 $|x|\ge a$，則 $x\le -a$ 或 $x\ge a$

3. 一元二次不等式

   (1) 解不等式過程中，若同乘、除一個負數，則不等號要變方向。

   (2) 若方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$有相異實根 α，β，且 $\alpha<\beta$

   (i) 若 $ax^2+bx+c>0$ 或 (≥ 0)，則解為 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$（ $x\le\alpha$ 或 $x\ge\beta$ ）。

   (ii) 若 $ax^2+bx+c<0$ 或 (≤ 0)，則解為 $\alpha<x<\beta$（ $\alpha\le x\le\beta$ ）

1-2 平面坐標系：

1. 兩點距離公式：

   平面上任意兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，則A點與B點間的距離為 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。

2. 分點公式：

   設平面上任意兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，且P為線段 $\overline{AB}$ 上一點，使得 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，

   則P點坐標為 $\left(\dfrac{n\times x_1+m\times x_2}{m+n},\dfrac{n\times y_1+m\times y_2}{m+n}\right)$。

3. 中點公式：

   設平面上任意兩點$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，且M為線段$\overline{AB}$的中點，則M點坐標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$。

4. 重心公式：

   ΔABC三頂點$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，且G為ΔABC之重心，

   則G點坐標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

5. 平行四邊形之第四點：

   已知$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，$D(x,y)$，若▱$ABCD$之為平行四邊形，則

   第四點 $D(x,y)=(x_1+x_3-x_2,y_1+y_3-y_2)$

1-3 線型函數與二次函數：

1. 對於每一個x值，剛好有一個而且只能有一個y值與之對應，稱這種對應為「y是x的函數」

2. 線性函數：$y=ax+b$的圖形為一直線。

3. 二次函數：$y=ax^2+bx+c$的圖形為拋物線，經配方法得

   $y=a(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$，其頂點坐標為 $\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

   (1) $a>0$ 時，拋物線開口向上。　(2) $a<0$ 時，拋物線開口向下。

2-1 直線斜率：

1. 直線斜率：已知一直線上任意相異二點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，則此直線斜率 $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ 或 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $(x_1\neq x_2)$。

2. 相異兩直線 L_1、L_2 之斜率分別為 m_1 、 m_2，則

   (1) 若 $L_1//L_2$，則 $m_1=m_2$。

   (2) 若 $L_1\perp L_2$，則 $m_1\times m_2=-1$。

2-2 直線方程式的求法：

1. 點斜式：直線過點 $(x_0\ ,\ y_0)$ 且斜率為 m，則直線方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$。
2. 斜截式：直線斜率為 m，y 截距為 b，則直線方程式為 $y=mx+b$。
3. 截距式：直線 x 截距為 a，y 截距為 b，且 $a\times b\neq 0$，則直線方程式為 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$。
4. 二平行線與二垂直線：

   設直線 $L:ax+by+c=0$，則與直線 L

   (1) **平行**之直線 L_1 可用 $ax+by+k=0$ 的型式表示。

   (2) **垂直**之直線 L_2 可用 $bx-ay+k=0$ 的型式表示。

2-3 點到直線的距離：

1. 點到直線的距離

   點 $A(x_0,y_0)$ 到直線 $L:ax+by+c=0$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2. 兩平行線間的距離

   兩平行線 $L_1:ax+by+c_1=0$ 與 $L_2:ax+by+c_2=0$ 之間的距離為 $\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3-1 多項式的四則運算：

1. 多項式：

   (1) 多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，

   當 $a_n\neq 0$ 時：$\deg f(x)=n$，領導係數為 a_n。

   (2) 常數多項式 a_0：$\begin{cases}\text{零次多項式} & (a_0\neq 0)\\ \text{零多項式} & (a_0=0)\end{cases}$。

2. 兩多項式相等：(1) 其次數相等 (2) 相同次數項的係數相等
3. 多項式加、減：從兩多項式之最高次項開始，依序將次數相同項的係數相加(減)。
4. 多項式乘法：

   (1) 逐項展開後，同次項係數相加(減)

   (2) 兩多項式皆不為零多項式，$\deg[f(x)\times g(x)]=\deg f(x)+\deg g(x)$

5. 多項式除法原理

   設 $f(x)$、$g(x)$ 為二多項式，且 $g(x)\neq 0$，則恰存在二多項式 $q(x)$ 及 $r(x)$ 滿足 $f(x)=g(x)\times q(x)+r(x)$，

   其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$。

3-2 餘式、因式定理：

1. 餘式定理：設 $a \neq 0$，以 $ax-b$ 除 $f(x)$ 所得餘式為 $f(\frac{b}{a})$。
2. 因式定理：設 $a \neq 0$，若 $ax-b$ 為 $f(x)$ 之因式，則 $f(\frac{b}{a})=0$。
3. 一次因式檢驗法：

   設 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 為一個整係數 n 次多項式，若整係數一次式 $ax-b$ 為 $f(x)$ 的因式，且 a、b 互質，則 a 為 a_n 的因數且 b 為 a_0 的因數。

3-3 分式：

1. 分式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 可分為三類：

   (1) 真分式：$\deg f(x) < \deg g(x)$

   (2) 假分式：$\deg f(x) \geq \deg g(x)$

   (3) 帶分式：一多項式與真分式相加減

2. 分式之四則運算：

   (1) $\frac{B}{A} \pm \frac{C}{A} = \frac{B \pm C}{A}$，$(A \neq 0)$

   $\frac{C}{A} \pm \frac{D}{B} = \frac{B \times C \pm A \times D}{A \times B}$，$(A \times B \neq 0)$

   (2) $\frac{B}{A} \times \frac{D}{C} = \frac{B \times D}{A \times C}$，$(A \times C \neq 0)$

   (3) $\frac{B}{A} \div \frac{D}{C} = \frac{B \times C}{A \times D}$，$(A \times C \times D \neq 0)$

第二冊公式

1-1 有向角及其度量：

1. 同界角：兩角θ_1與θ_2有相同的始邊與終邊，稱兩角為同界角。即 $\theta_1-\theta_2=360^0\times n=2\pi\times n$，$n$為整數。
2. 扇形的弧長與面積 ：
3. 設一扇型半徑為 r，圓心角為 θ **弧度**，弧長為 S，面積為 A，則

   (1) $S=r\times\theta$

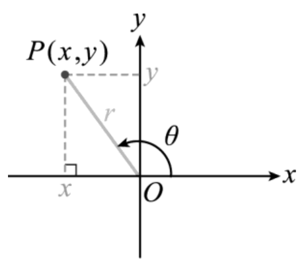
   (2) $A=\dfrac{1}{2}\times r^2\times\theta=\dfrac{1}{2}\times r\times S$

1-2 三角函數的定義與基本性質

1. 銳角三角函數定義 ：

   ① $\sin\theta=\dfrac{對邊}{斜邊}$　② $\cos\theta=\dfrac{鄰邊}{斜邊}$　③ $\tan\theta=\dfrac{對邊}{鄰邊}$
2. 餘角關係：$\sin(90^0-\theta)=\cos\theta$ ； $\cos(90^0-\theta)=\sin\theta$
3. 商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
4. 平方關係：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

1-3 任意角的三角函數



1. 廣義角的三角函數定義 ：$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$

   ① $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$　② $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$　③ $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$　$(x\neq0)$
2. 各象限內三角函數值之正、負判別 ：

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
第一象限	+	+	+
第二象限	+	–	–
第三象限	–	–	+
第四象限	–	+	–

1-4 三角函數的圖形

三角函數之定義域、值域與週期 ：

函數	定義域(n為整數)	值域	週期
$\sin x$	x為所有實數	$-1\le\sin x\le1$	2π
$\cos x$	x為所有實數	$-1\le\cos x\le1$	2π
$\tan x$	$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 之所有實數	所有實數	π

1-5 正弦與餘弦定理

1. 正弦定理：

(1) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。　(2) $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$。

2. 餘弦定理：

(1) $a^2=b^2+c^2-2\times b\times c\times\cos A$ ； $b^2=a^2+c^2-2\times a\times c\times\cos B$ ； $c^2=a^2+b^2-2\times a\times b\times\cos C$。

(2) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\times b\times c}$ ； $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2\times a\times c}$ ； $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\times a\times b}$。

2-1 向量的意義

1. 設 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，則 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ 且 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

2. 單位向量：長度為 1 的向量。

已知非零向量 $\overrightarrow{a}$ 的單位向量為 $\pm\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$

2-2 向量的加減與實數積

1. 設 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$、$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$ 且 r 為實數，

(1) $\overrightarrow{a}\pm\overrightarrow{b}=(x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2)$。

(2) $r\overrightarrow{a}=(rx_1,rx_2)$

2-3 向量的夾角與內積

1. 設 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$、$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$ 且 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角 θ，則內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\times|\overrightarrow{b}|\times\cos\theta=x_1\times x_2+y_1\times y_2$

2. 設兩非零向量 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$，

(1) 若 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ 即 $x_1\times x_2+y_1\times y_2=0$。

(2) 若 $\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{b}$ 即 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$，$x_2\neq0$ 且 $y_2\neq0$。

3. $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2\geq0$

3-1 圓的方程式

1. 圓的標準式：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，圓心 (h,k)，半徑 r。

2. 圓的一般式：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，圓心 $\left(-\dfrac{d}{2},-\dfrac{e}{2}\right)$，半徑 $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$。

3. 圓的直徑式：$(x-x_1)\times(x-x_2)+(y-y_1)\times(y-y_2)=0$，其中 (x_1,y_1)、(x_2,y_2) 為直徑兩端點。

4. 判別 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 之圖形：

(1) $d^2+e^2-4f>0$，表一圓。

(2) $d^2+e^2-4f=0$，表一點。

(3) $d^2+e^2-4f<0$，表無圖形。

3-2 圓與直線的關係

1. 設 $P(x_0, y_0)$ 與圓 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則
   (1) P 在圓上 $\Leftrightarrow$ $x_0{}^2+y_0{}^2+dx_0+ey_0+f=0$。
   (2) P 在圓外 $\Leftrightarrow$ $x_0{}^2+y_0{}^2+dx_0+ey_0+f>0$。
   (3) P 在圓內 $\Leftrightarrow$ $x_0{}^2+y_0{}^2+dx_0+ey_0+f<0$。
2. 圓：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，直線 $L: ax+by+c=0$，設 d 為圓心到 L 的距離，則
   (1) $d>r$：相離（ 無交點 ）。
   (2) $d=r$：相切（ 交一點 ）。
   (3) $d<r$：相割（ 交兩點 ）。
3. 圓的切線方程式：已知切點 $P(x_0, y_0)$
   (1)標準式：切線方程式為 $(x_0-h)\times(x-h)+(y_0-k)\times(y-k)=r^2$。
   (2)一般式：切線方程式為 $x_0x+y_0y+d(\frac{x+x_0}{2})+e(\frac{y+y_0}{2})+f=0$。
4. 切線段長：圓外一點 $P(x_0, y_0)$
   (1)標準式：切線段長 $l=\sqrt{(x_0-h)^2+(y_0-k)^2-r^2}$。
   (2)一般式：切線段長 $l=\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+dx_0+ey_0+f}$。

4-1 等差數列與等差級數

1. $a_n=a_1+(n-1)\times d$
2. 等差中項：A、B、C 成等差數列，則稱 B 為 A、C 之等差中項，且 $B=\frac{A+C}{2}$。
3. 等差級數求前 n 項的和：$S_n=\frac{n\times(a_1+a_2)}{2}=\frac{n\times[2\times a_1+(n-1)\times d]}{2}$

4-2 等比數列與等比級數

1. $a_n=a_1\times r^{n-1}$。
2. 等比中項：A、B、C 成等比數列，則稱 B 為 A、C 之等比中項，且 $B=\pm\sqrt{A\times C}$。
3. 等比級數求前 n 項的和：
   (1) $r=1$，$S_n=n\times a_1$
   (2) $r\neq1$，$S_n=\frac{a_1\times(1-r^n)}{1-r}=\frac{a_1\times(r^n-1)}{r-1}$。

第三冊公式

1-1 一元一次方程式：

一元一次方程式 $ax+b=0$，且 a 、b 為實數，則

(1) 當 $a\neq 0$ 時，恰有一解 $x=\dfrac{-b}{a}$

(2) 當 $a=b=0$ 時，➩ x 為無限多解

(3) 當 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 時，x 為無解

1-2 一元二次方程式：

1. 設 a 、b 、c 為實數且 $a\neq 0$，則 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 。

2. 根的性質:

   一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，$a\neq 0$：

   (1) $b^2-4ac>0$，x 有二相異實根。

   (2) $b^2-4ac=0$，x 有二相等實根。

   (3) $b^2-4ac<0$，x 無實根。

   (4) 若 α 、β 為其二根，則 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\times\beta=+\dfrac{c}{a}$ 。

3. 已知 α 、β 為一元二次方程式的二根，則此方程式為 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\times\beta=0$ 。

1-3 二元一次聯立方程組：

1. 對二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，設 L_1 為直線 $a_1x+b_1y=c_1$，L_2 為直線 $a_2x+b_2y=c_2$

$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$	(x,y) 恰有一組解	相容方程組 L_1 與 L_2 相交於一點
$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$	(x,y) 無限多組解	相依方程組 L_1 與 L_2 重合為一直線
$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$	(x,y) 無解	矛盾方程組 L_1 與 L_2 互相平行

2-1 一元二次不等式

1. 一元二次不等式的解: **解不等式過程中，若同乘、除一個負數，則不等號要變方向。**

設 a 、b 、c 為實數且 $a>0$

(1) $b^2-4ac>0$

設 α 、 β 為 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，且 $\alpha<\beta$，則

(1) $ax^2+bx+c>0$ 之解 ➩ $x<\alpha$ 或 $x>\beta$

(2) $ax^2+bx+c\geq 0$ 之解 ➩ $x\leq\alpha$ 或 $x\geq\beta$

(3) $ax^2+bx+c<0$ 之解 ➩ $\alpha<x<\beta$

(4) $ax^2+bx+c\leq 0$ 之解 ➩ $\alpha\leq x\leq\beta$

(2) $b^2-4ac=0$

設 $ax^2+bx+c=a\left(x-\alpha\right)^2$，則

(1) $ax^2+bx+c>0$ 之解 ➩ x 為不等於 α 的所有實數

(2) $ax^2+bx+c\geq 0$ 之解 ➩ x 為無限多解

(3) $ax^2+bx+c<0$ 之解 ➩ 無解

(4) $ax^2+bx+c\leq 0$ 之解 ➩ $x=\alpha$

(3) $b^2-4ac<0$

(1) $ax^2+bx+c>0$ 之解 ➩ x 為無限多解

(2) $ax^2+bx+c\geq 0$ 之解 ➩ x 為無限多解

(3) $ax^2+bx+c<0$ 之解 ➩ 無解

(4) $ax^2+bx+c\leq 0$ 之解 ➩ 無解

2-2 二元一次不等式的圖形

1. 設直線 $L:ax+by+c=0$，若 $a>0$，則二元一次不等式

(1) $ax+by+c>0$ 的圖形為直線 L 的右半平面，不含直線 L (畫虛線) 。$ax+by+c\leq 0$

(2) $ax+by+c\geq 0$ 的圖形為直線 L 的右半平面，含直線 L (畫實線) 。

(3) $ax+by+c<0$ 的圖形為直線 L 的左半平面，不含直線 L (畫虛線) 。

(4) $ax+by+c\leq 0$ 的圖形為直線 L 的左半平面，含直線 L (畫實線)。

2. 設直線 $L:ax+by+c=0$，且平面任意兩點 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，則

(1) P,Q 在 L 之同側 $\Leftrightarrow (ax_1+by_1+c)\times(ax_2+by_2+c)>0$

(2) P,Q 在 L 之異側 $\Leftrightarrow (ax_1+by_1+c)\times(ax_2+by_2+c)<0$。

(3) P 或 Q 有一點在 L 上 $\Leftrightarrow (ax_1+by_1+c)\times(ax_2+by_2+c)=0$。

2-3 線性規劃

1. 線性規劃解法：

(1)依題意列出不等式及目標函數 $f(x,y)$。

(2)繪出不等式圖形之區域，並求各頂點坐標。

(3)目標函數的最大、最小值必發生在區域的頂點中，將每一頂點代入目標函數 $f(x,y)$ 中，即可求出最大值或最小值。

3-1 指數與對數及其運算的意義

1. 指數律： $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ； $(a^m)^n = a^{m\times n}$； $a^n \times b^n = (a\times b)^n$； $a^0 = 1$ ； $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ ； $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ； $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

2. 對數的性質：a 、 b 、 c 皆大於 0 不等於 1，d 、 M 、 N 皆大於 0

   (1) $\log_a 1 = 0$ (2) $\log_a M + \log_a N = \log_a (M\times N)$ (3) $\log_a M - \log_a N = \log_a (\dfrac{M}{N})$

   (4) $\log_{a^s} M^r = \dfrac{r}{s}\times \log_a M$ (5) $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ (6) $\log_a b \times \log_b c \times \log_c d = \log_a d$ (7) $a^{\log_a M} = M$ 。

3-2 指數圖形

1. $y = a^x$ 恆過 (0 , 1) 且 恆正。

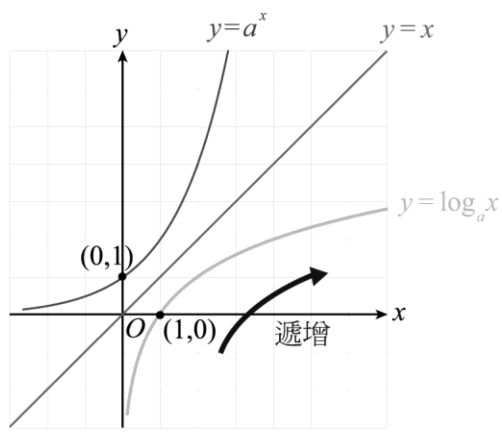
2. 當 $a > 1$ 時，$y = a^x$ 為增函數；當 $a < 1$ 時，$y = a^x$ 為減函數。

3-3 對數圖形

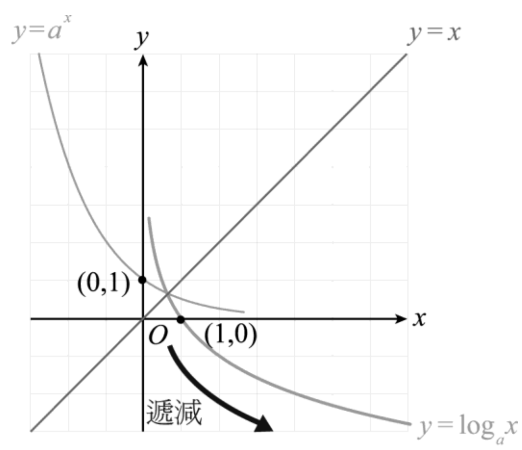
1. $y = \log_a x$ 恆過 (1 , 0)。

2. 當 $a > 1$ 時，$y = \log_a x$ 為增函數；當 $0 < a < 1$ 時，$y = \log_a x$ 為減函數。

3. $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 的圖形 對稱於直線 $y = x$ 。



$a>1$



$0<a<1$

3-4 常用對數

1. 設 $\log x = n + a$ ，其中 n 為整數且 $0 \le a < 1$ ，則 n 稱為首數，a 為尾數。

2. 當真數大於 1 時，則真數為 $(n+1)$ 位數。

3. 當真數介於 0~1 之間時，則真數為小數點後第 $|n|$ 位始不為 0 的數。

第四冊公式

1-1 乘法原理與樹狀圖：

1. 加法原理：設完成某件事情有 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 等 m 種不同方式，
   而每一方式 A_i 皆有 n_i 個方法（$i=1,2,\cdots,m$）
   則完成該件事情共有 $n_1+n_2+\cdots+n_i+\cdots n_m$ 個方法。
2. 乘法原理：設完成某件事情需要經過 k 個步驟，
   而每個步驟分別有 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 種方法，
   則完成該件事的方法總數有 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$ 種。

1-2 排列與組合：

1. 階乘: $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1$。
2. 相異物的直線排列

   由 n 件不同的事物中，任選 m 件（ $m \le n$ ）的排列數為

   $P^n_m = \dfrac{n!}{(n-m)!} = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-m+1)$ 。

   《註》(1) $P^n_n = n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$

   (2) $P^n_m = n\times P^{n-1}_{m-1} = (n-m+1)\times P^n_{m-1}$
3. 不盡相異物的直線排列

   (1) 設 n 件事物中有 m 件相同（ $m \le n$ ），其餘均不同，則此 n 件事物全取排列的排列數為 $\dfrac{n!}{m!}$ 。

   (2) 設 n 件事物中，共有 k 類，第一類有 m_1 件，第二類有 m_2 件，...，第 k 類有 m_k 件（此時 $n = m_1+m_2+\cdots+m_k$ ），則此 n 件事物全取排成一列的排列數為 $\dfrac{n!}{m_1!\times m_2!\times\cdots\times m_k!}$ 。
4. 組合公式：

   (1) $C^n_m = C^n_{n-m}$

   (2) $C^n_m = C^{n-1}_m + C^{n-1}_{m-1}$

   (3) $C^n_0 + C^n_1 + C^n_2 + \cdots + C^n_n = 2^n$
5. 重複排列:

   自 n 件相異物中，任選 m 個的重複排列總數為 n^m 。
6. **組合**

   自 n 件相異的事物中，任選 m 件（ $0 \le m \le n$ ）為一組的組合數為

   $C^n_m = \dfrac{P^n_m}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)}{m\times(m-1)\times\cdots\times 2\times 1}$ 。

   《註》(1) $C^n_n = 1$ ； $C^n_0 = 1$

   (2) $C^n_m \times m! = P^n_m$

1-3 二項式定理：

1. 對於任意正整數 n

$$\left(x+y\right)^{n}=\sum_{r=0}^{n}C_{r}^{n}x^{n-r}y^{r}=C_{0}^{n}x^{n}+C_{1}^{n}x^{n-1}y+C_{2}^{n}x^{n-2}y^{2}+\cdots+C_{r}^{n}x^{n-r}y^{r}+\cdots+C_{n}^{n}y^{n}$$

《註》$\left(x+y\right)^{n}$展開式中，依x的降冪排列，第$r+1$項為 $C_{r}^{n}x^{n-r}y^{r}$，又稱為一般項。

2.

(1) $C_{m}^{n}=C_{n-m}^{n}$ ($0\le m\le n$)

(2) $C_{m}^{n}=C_{m}^{n-1}+C_{m-1}^{n-1}$ ($1\le m\le n-1$)

(3) $C_{0}^{n}+C_{1}^{n}+C_{2}^{n}+\cdots+C_{n}^{n}=2^{n}$

《註》a 、b為不大於n的自然數，則$C_{a}^{n}=C_{b}^{n}$ $\Leftrightarrow$ $a=b$ 或 $a+b=n$ 。

2-1 樣本空間與事件

1. $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ 。
2. $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ 。
3. 笛摩根法則：

(1) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ ； (2) $(A\cap B)'=A'\cup B'$。

2-2 求機率問題

1. 設S為樣本空間，其中各基本事件出現機會均等，若$A\subset S$為一事件，則事件A發生機率記為$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ 。
2. 機率性質：

(1) $P(\varnothing)=0$ ； (2) $P(S)=1$ ； (3) $0\le P(A)\le 1$ ； (4) $P(A')=1-P(A)$

3. 條件機率：設A 、B為樣本空間S中的任意二事件，則在A事件發生的情況下，B事件發生的條件機率為 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$ 。
4. 獨立事件：設A 、B為樣本空間S中的任意二個獨立事件，則$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ 。

2-3 數學期望值

1. 設一隨機試驗的樣本空間為S ，$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$為樣本空間S的一個分割，且事件A_i發生的機率為p_i ($i=1$、2、...、n)，若事件A_i發生可得數值m_i($i=1$、2、...、n)的報酬，則$E=p_1\times m_1+p_2\times m_2+\cdots+p_n\times m_n$ 稱為此隨機試驗的數學期望值，簡稱期望值。

2-4 抽樣方法

(1) 簡單隨機抽樣

(2) 系統抽樣

(3) 分層隨機抽樣

(4) 部落抽樣

2-5 資料整理與圖表編製

1. 資料整理的步驟：(1)分類；(2)歸類；(3)列表；(4)繪圖。
2. 編製次數分配表的步驟：
   (1)求全距；(2)求組數；(3)定組距；(4)定組限；(5)歸類劃記；(6)計算次數；
   (7)整理成統計表；(8)作次數直方圖及次數分配曲線圖。
3. 離散型資料的圖表：(1)長條圖；(2)折線圖；(3)圓面積圖。

2-6 算數平均數、加權平均數、中位數、眾數、四分位距

1. 算術平均數： 設一群數值為 x_1、x_2、...、x_n，則其算術平均數 $\overline{X}$ 定義為 $\overline{X}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ 。
2. 加權平均數：
   設 w_1、w_2、...、w_n 分別為一群數值 x_1、x_2、...、x_n 的權數，
   則這一群數值的加權平均數 W 定義為 $W=\dfrac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}w_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}w_i}$ 。
3. 中位數
   將一群數值由小而大排列如下：$x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$
   當 $n=2k+1$ 為奇數時：中位數定義為 $Me=x_{k+1}$（排在正中間的數值）
   當 $n=2k$ 為偶數時：中位數定義為 $Me=\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}$（排在正中間兩個數值的算術平均）
4. 眾數
   一群數值資料中，出現次數最多的數值稱為眾數，通常用 Mo 來表示。
5. 四分位距
   設一群數值由小而大排列如下：$x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$ ，其中 $n=2k$ 或 $2k+1$ ，則
   第 1 四分位數 Q_1 為 x_1、...、x_k 的中位數
   第 3 四分位數 Q_3 為 x_{n-k+1}、...、x_n 的中位數
   而 Q_3 與 Q_1 的差稱為四分位距，以 IQR 來表示，亦即 $IQR=Q_3-Q_1$ 。

2-6 標準差

1. 樣本的變異數與標準差：
   設一組樣本資料為 x_1、x_2、...、x_n ，其算術平均數為 $\overline{X}$ ，
   則樣本的變異數為 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2$ ，其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 。
   而樣本的標準差為 $S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{X}^2\right)}$ 。

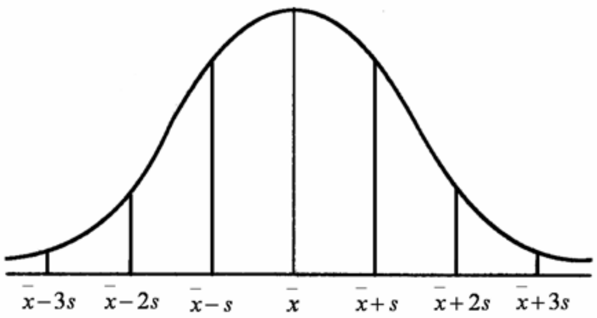
2. 母群體的變異數與標準差：

設母群體資料為 x_1、x_2、…、x_N，其算術平均數為 μ，則母群體的變異數為 $\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$，其中 $\mu=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$。

而母群體的標準差為 $\sigma=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}=\sqrt{\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^{\,2}\right)-\mu^2}$。

2-7 解讀信賴區間與信心水準

1. 常態分配（68-95-99.7 規則）



(1)介於 $\overline{X}-S$ 與 $\overline{X}+S$ 之間，約有 68% 個資料。
(2)介於 $\overline{X}-2S$ 與 $\overline{X}+2S$ 之間，約有 95% 個資料。
(3)介於 $\overline{X}-3S$ 與 $\overline{X}+3S$ 之間，約有 99.7% 個資料。

2. 信賴區間

是用來評估調查的不確定性的指標，它是由抽樣的樣本所計算出來，用以推估有多少的信心說明母群體的平均數或百分比在此區間內，通常是用 95% 的信賴區間來表示。

3. 95%的信心水準

不斷地重複抽取隨機樣本，隨著樣本不同，信賴區間也會隨樣本而改變，在眾多的區間當中，約有95%的區間會涵蓋真正的母群體平均數或百分比。