銜 接 教 材

分為下列 5 單元

第 1 單元　指數與根式的運算

主題 1　指數的運算

1.指數記法：設 a 為實數，n 為正整數，我們以 a^n 表示 n 個 a 相乘，即 $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots a}_{n\text{個}}$，讀作「$a$ 的 n 次方」，其中 a 為底數，n 為指數。

2.正整數指數律：若 a,b 為實數，m,n 為正整數，則

$$(1)\ a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (2)\ (a^n)^m = a^{nm} \quad (3)\ (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

3.零指數與負整數指數：

(1)若 $a \neq 0$，定義 $a^0 = 1$，且 0^0 無意義。

(2)若 $a \neq 0$，n 為正整數，定義 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$。

(3)若 $a \neq 0$，m,n 為正整數，則 $a^n \div a^m = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$。

4.指數之比較大小：

(1)底數皆為 a，且 $a > 1$ 時，若 $m > n$，則 $a^m > a^n$。

(2)底數不同，但指數相同時，若 $a > b > 0$，則 $a^m > b^m$。

5.科學記號：將一個數記作 $a \times 10^n$ 形式，其中 $1 \leq a < 10$，n 為整數，即稱為科學記號，例如：

$3.14 \times 10^6, 1 \times 10^{-6}$ 皆為科學記號。

例題1	類題1
(1) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^n$，則 $n = ?$ (2) $3^2 \times 3^4 + (3^2)^4 = k \cdot 3^6$，則 $k = ?$ (3) $2^5 \times (-2)^5 = m^5$，則 $m = ?$ 解： (1)3有5個相乘，表示為 3^5，$n = 5$ (2)原式 $= 3^{2+4} + 3^{2\times4} = 3^6 + 3^8$ $= 3^6(1+3^2) = 10 \times 3^6$，$k = 10$ (3)原式 $= [2 \times (-2)]^5 = (-4)^5$，$m = -4$	(1) $2 \times (-2) \times (-2) \times (-2) = k(-2)^n$，則 $k = ?\ n = ?$ (2) $(-4)^2 \times (-4)^4 + [(-4)^2]^3 = k \times 4^n$，則 $k = ?\ n = ?$ (3) $5^6 \times (\frac{1}{5})^6 = ?$ 解： (1)原式 $= 2 \times (-2)^3$，$k = 2, n = 3$ (2)原式 $= (-4)^{2+4} + (-4)^{2\times3}$ $= 4^6 + 4^6 = 2 \times 4^6$，$k = 2, n = 6$ (3)原式 $= (5 \times \frac{1}{5})^6 = 1$

例題2	類題2
試求下列各值： (1) $-5^2+(-5)^2=?$ (2) $-5^3+(-5)^3=?$ 解： (1) $-25+25=0$ (2) $-125+(-125)=-250$	試求下列各值： (1) $-1^2+(-1)^2=?$ (2) $-1^3+(-1)^3=?$ 解： (1) $-1+1=0$ (2) $-1-1=-2$
例題3	類題3
試求下列各值： (1) $(-3)^2+(-3)^{-2}=?$ (2) $-699^0+(-1023)^0=?$ 解： (1) $9+\frac{1}{9}=\frac{82}{9}$ (2) $-1+1=0$	試求下列各值： (1) $2^3+2^{-3}=?$ (2) $(-\frac{1}{5})^0-(\frac{1}{5})^0=?$ 解： (1) $8+\frac{1}{8}=\frac{65}{8}$ (2) $1-1=0$
例題4	類題4
(1) $5^6\div5^4\times5^3=5^k$，則 $k=?$ (2) $10^4\times(10^{-2})^3\div10^{-1}=10^n$，則 $n=?$ (3) $(2^3)^4\times16^2\div32^3=2^m$，則 $m=?$ (4) $12^4=2^a\cdot3^b$，則 $a+b=?$ 解： (1) $5^{6-4+3}=5^5$，$\therefore k=5$ (2) $10^{4+(-2)\times3-(-1)}=10^{-1}$，$\therefore n=-1$ (3) $2^{3\times4}\times(2^4)^2\div(2^5)^3=2^{12+8-15}=2^5$ $\therefore m=5$ (4) $(2^2\times3)^4=2^{2\times4}\times3^4$ $\therefore a+b=8+4=12$	(1) $6^2\times6^5\div6^4=6^k$，則 $k=?$ (2) $(-5)^{-3}\times[(-5)^4]^2\div(-5)^3=(-5)^n$，則 $n=?$ (3) $3^5\div\frac{1}{81}\times(\frac{1}{9})^3=3^m$，則 $m=?$ (4) $10^6=4^c\times5^d$，則 $c+d=?$ 解： (1) $6^{2+5-4}=6^3$，$\therefore k=3$ (2) $(-5)^{-3+4\times2-3}=(-5)^2$，$\therefore n=2$ (3) $3^5\div3^{-4}\times(3^{-2})^3=3^{5-(-4)+(-6)}=3^3$ $\therefore m=3$ (4) $(2\times5)^6=2^6\times5^6=(2^2)^3\times5^6$ $=4^3\times5^6$ $\therefore c+d=3+6=9$

例題5	類題5
(1) $\dfrac{a^3b^4}{a^2b}=a^xb^y$，則 $x+y=?$ (2) $\dfrac{(3^2\cdot 5^3)^2\cdot 3}{5^4}=3^m\cdot 5^n$，則 $m+n=?$ 解： (1) $a^{3-2}\cdot b^{4-1}=ab^3$，$\therefore x+y=1+3=4$ (2) $3^{2\times 2+1}\cdot 5^{3\times 2-4}=3^5\cdot 5^2$ $\therefore m+n=5+2=7$	(1) $\dfrac{x(x^2y^3)}{xy^4}=x^ry^s$，則 $r+s=?$ (2) $\dfrac{(7^6\cdot 5^3)\cdot 7^3}{35}=5^a\cdot 7^b$，則 $a+b=?$ 解： (1) $x^{1+2-1}\cdot y^{3-4}=x^2y^{-1}$ $r+s=2+(-1)=1$ (2) $7^{6+3-1}\cdot 5^{3-1}=7^8\cdot 5^2$，$\therefore a+b=2+8=10$

例題6	類題6
試比較各組數的大小： (1) $3^{11},9^6,27^3$ (2) $4^8,8^6,16^4$ 解： (1) $9^6=(3^2)^6=3^{12}$ $27^3=(3^3)^3=3^9$ $\because 3^9<3^{11}<3^{12}$ $\therefore 27^3<3^{11}<9^6$ (2) $4^8=(2^2)^8=2^{16}$ $8^6=(2^3)^6=2^{18}$ $16^4=(2^4)^4=2^{16}$ $\because 2^{16}<2^{18}$ $\therefore 4^8=16^4<8^6$	試比較各組數的大小： (1) $2^{20},4^{15},8^{10}$ (2) $3^{0.5},9^{0.2},27^{0.3}$ 解： (1) $4^{15}=(2^2)^{15}=2^{30}$ $8^{10}=(2^3)^{10}=2^{30}$ $\because 2^{20}<2^{30}$ $\therefore 2^{20}<4^{15}=8^{10}$ (2) $9^{0.2}=(3^2)^{0.2}=3^{0.4}$ $27^{0.3}=(3^3)^{0.3}=3^{0.9}$ $\because 3^{0.4}<3^{0.5}<3^{0.9}$ $\therefore 9^{0.2}<3^{0.5}<27^{0.3}$

例題7	類題7
試比較各組數的大小： (1) $0.3^{10}, 1.3^{10}, 2.3^{10}$ (2) $2^{12}, 3^{8}, 5^{4}$ 解： (1) $\because 0.3<1.3<2.3$ 且指數相同 $\therefore 0.3^{10}<1.3^{10}<2.3^{10}$ (2) $2^{12}=(2^{3})^{4}=8^{4}$ $3^{8}=(3^{2})^{4}=9^{4}$ $\because 5<8<9$ $\therefore 5^{4}<2^{12}<3^{8}$	試比較各組數的大小： (1) $0.3^{6}, 1, 1.3^{6}$ (2) $2^{30}, 3^{20}, 4^{10}$ 解： (1) $\because 0.3<1<1.3$，又 $1^{6}=1$ $\therefore 0.3^{6}<1<1.3^{6}$ (2) $2^{30}=(2^{3})^{10}=8^{10}$ $3^{20}=(3^{2})^{10}=9^{10}$ $\because 4<8<9$ $\therefore 4^{10}<2^{30}<3^{20}$
例題8	類題8
請將下列各值表示為科學記號： (1)1230000 (2)0.00425 (3) 0.0013×10^{6} (4) 0.2^{4} 解： (1) 1.23×10^{6} (2) 4.25×10^{-3} (3) $1.3\times10^{-3}\times10^{6}=1.3\times10^{3}$ (4) $(2\times10^{-1})^{4}=2^{4}\times10^{-4}=1.6\times10^{-3}$	請將下列各值表示為科學記號： (1) 125×10^{3} (2) 0.039×10^{-4} (3) 0.03^{2} 解： (1) $1.25\times10^{2}\times10^{3}=1.25\times10^{5}$ (2) $3.9\times10^{-2}\times10^{-4}=3.9\times10^{-6}$ (3) $(3\times10^{-2})^{2}=3^{2}\times10^{-4}=9\times10^{-4}$

例題9	類題9
(1)試展開 $a=9.2\times10^{4}$。 (2)由(1)觀察，a 為幾位數？ (3)若 $b=42.5\times10^{12}$，則 b 為幾位數？ 解： (1) $a=92000$ (2)由 a 的科學記號 9.2×10^{4} 可知 a 為 $4+1=5$ 位數 (3) $b=4.25\times10\times10^{12}=4.25\times10^{13}$ $\therefore b$ 為 $13+1=14$ 位數	(1)試展開 $c=0.12\times10^{6}$。 (2)由(1)觀察，c 為幾位數？ (3)若 $d=0.0023\times10^{10}$，則 d 為幾位數？ 解： (1) $c=120000$ (2)由 c 的科學記號 1.2×10^{5} 可知 c 為 $5+1=6$ 位數 (3) $d=2.3\times10^{-3}\times10^{10}=2.3\times10^{7}$ $\therefore d$ 為 $7+1=8$ 位數

例題10	類題10
(1)試展開 $a=9.2\times10^{-4}$。 (2)由(1)觀察，則 a 自小數點以後第幾位始不為0？ (3)若 $b=42.5\times10^{-12}$，則 b 自小數點以後第幾位始不為0？ 解： (1) $a=0.00092$ (2)由 a 的科學記號 9.2×10^{-4}，可知 a 自小數點以後第4位始不為0 (3) $b=4.25\times10\times10^{-12}=4.25\times10^{-11}$ $\therefore b$ 自小數點以後第11位始不為0	(1)試展開 $c=0.12\times10^{-6}$。 (2)由(1)觀察，c 自小數點以後第幾位始不為0？ (3)若 $d=0.0023\times10^{-10}$，則 d 自小數點以後第幾位始不為0？ 解： (1) $c=0.00000012$ (2)由 c 的科學記號 $1.2\times10^{-1}\times10^{-6}=1.2\times10^{-7}$，可知 c 自小數點以後第7位始不為0 (3) $d=2.3\times10^{-3}\times10^{-10}=2.3\times10^{-13}$ $\therefore d$ 自小數點以後第13位始不為0

主題 2　根式的運算

1.平方根：

設 $a>0$，若 $x^2=a$，則 x 為 a 的平方根，記作 $x=\pm\sqrt{a}$。

平方根的運算性質如下：

(1)若 $a\geq 0, b\geq 0$，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$。

(2)若 $a\geq 0, b>0$，則 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$。

(3) $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, a\geq 0 \\ -a, a<0 \end{cases}$。

2.立方根：

設 a 為任意實數，若 $x^3=a$，則 x 為 a 的立方實根，記作 $x=\sqrt[3]{a}$。

立方根的運算性質如下：
令 a,b 為任意實數

(1) $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$。

(2) $\sqrt[3]{a}\div\sqrt[3]{b}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$，其中 $b\neq 0$。

(3) $\sqrt[3]{a^3}=(\sqrt[3]{a})^3=a$。

3.最簡根式：

在 $\sqrt[n]{a}$ 中，整數 a 的因式無法移到根號外，且根指數 n 也無法化小。

$\boxed{\text{例}}$ $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，$\sqrt{12}$ 不是最簡根式，但 $2\sqrt{3}$ 為最簡根式。

$\boxed{\text{例}}$ $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{2^3\times 3}=2\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[3]{24}$ 不是最簡根式，但 $2\sqrt[3]{3}$ 為最簡根式。

4.有理化因式：

若兩個根式的乘積為有理式，則此兩根式互稱為有理化因式。

$\boxed{\text{例}}$ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$

$\boxed{\text{例}}$ $(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)=(\sqrt[3]{x})^3-1=x-1$

則 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 與 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$，$\sqrt[3]{x}-1$ 與 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$ 皆互稱為有理化因式。通常，若分母為根式時，我們利用有理化因式將分母有理化，以方便運算。

例題11	類題11
(1)64的平方根為何？立方根為何？ (2)試求下列各值 ① $\sqrt{64}=$____　② $-\sqrt{64}=$____ ③ $\sqrt[3]{64}=$____　④ $\sqrt[3]{-64}=$____ ⑤ $-\sqrt[3]{64}=$____　⑥ $-\sqrt[3]{-64}=$____ 解： (1) $64=(\pm 8)^2$，平方根 $=\pm 8$ 又 $64=4^3$，立方根 $=4$ (2)① $\sqrt{64}=\sqrt{8^2}=8$ ② $-\sqrt{64}=-8$ ③ $\sqrt[3]{4^3}=4$ ④ $\sqrt[3]{(-4)^3}=-4$ ⑤ $-\sqrt[3]{64}=-4$ ⑥ $-\sqrt[3]{-64}=-(-4)=4$	(1)169的平方根為何？ (2) -125 的立方根為何？ (3) $\sqrt{25}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{-8}$ 值為何？ 解： (1) $169=(\pm 13)^2$，平方根 $=\pm 13$ (2) $-125=(-5)^3$，立方根 $=-5$ (3) $\sqrt{5^2}+\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[3]{(-2)^3}$ $=5+2+(-2)=5$
例題12	類題12
請將下列化為最簡根式： (1) $\sqrt{3^7}$　(2) $\sqrt{72}$　(3) $\sqrt{2^4\times 5^2\times 7^3}$ 解： (1) $\sqrt{3^6\times 3}=27\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{2^3\times 3^2}=2\times 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{2^4\times 5^2\times 7^3}=2^2\times 5\times 7\times\sqrt{7}$ $=140\sqrt{7}$	請將下列化為最簡根式： (1) $\sqrt{6^3}$　(2) $\frac{1}{2}\sqrt{108}$　(3) $\sqrt{3^5\times 7^2}$ 解： (1) $\sqrt{6^2\times 6}=6\sqrt{6}$ (2) $\frac{1}{2}\sqrt{2^2\times 3^3}=\frac{1}{2}\times 2\times 3\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ (3) $\sqrt{3^5\times 7^2}=3^2\times 7\times\sqrt{3}=63\sqrt{3}$

例題13	類題13
試求下列各值： (1) $\sqrt{27}+\sqrt{75}-\sqrt{64}$ (2) $4\sqrt{18}+\sqrt{48}-\sqrt{72}$ 解： (1)原式 $=3\sqrt{3}+5\sqrt{3}-8$ $=8\sqrt{3}-8$ (2)原式 $=4\cdot 3\sqrt{2}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}$ $=6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$	試求下列各值： (1) $\sqrt{45}-\sqrt{125}+\sqrt{20}$ (2) $\sqrt{243}-2\sqrt{12}+\sqrt{49}$ 解： (1)原式 $=3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+2\sqrt{5}=0$ (2)原式 $=9\sqrt{3}-2\times 2\sqrt{3}+7=5\sqrt{3}+7$

例題14	類題14
試求下列各值： (1) $\sqrt{(-5)^2}\times(-\sqrt{7})^2$ (2) $\sqrt{3}\div\sqrt{6}\times\sqrt{8}$ (3) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{14}}\times 2\sqrt{\frac{7}{6}}\div\sqrt{\frac{1}{8}}$ 解： (1)原式 $=5\times 7=35$ (2) $\sqrt{\frac{3\times 8}{6}}=\sqrt{4}=2$ (3)原式 $=\frac{1}{3}\times 2\times\sqrt{\frac{3}{14}\times\frac{7}{6}\times\frac{8}{1}}$ $=\frac{2}{3}\sqrt{2}$	試求下列各值： (1) $\sqrt{(-6)^2}+\sqrt{6^2}$ (2) $\sqrt{50}\div\sqrt{5}\div\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{\frac{5}{7}}\div(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}})\times(-\sqrt{\frac{3}{125}})$ 解： (1)原式 $=6+6=12$ (2) $\sqrt{\frac{50}{5\times 2}}=\sqrt{5}$ (3)原式 $=\sqrt{\frac{5\times 28\times 3}{7\times 3\times 125}}=\frac{2}{5}$

例題15	類題15
試求下列各值： (1) $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{-8}$ (2) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}$ (3) $\sqrt[3]{-8}\times\sqrt[3]{\frac{5}{32}}\div\sqrt[3]{\frac{2}{25}}$ 解： (1)原式 $=2+(-2)=0$ (2)原式 $=\sqrt[3]{2\times3^3}+\sqrt[3]{2^4}-\sqrt[3]{2}$ $=3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}$ $=4\sqrt[3]{2}$ (3)原式 $=\sqrt[3]{-8\times\frac{5}{32}\times\frac{25}{2}}=\sqrt[3]{-\frac{125}{8}}$ $=-\frac{5}{2}$	試求下列各值： (1) $\sqrt[3]{(-5)^3}+\sqrt{(-7)^2}$ (2) $\sqrt[3]{108}-3\sqrt[3]{4}$ (3) $\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{9}}\times\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}$ 解： (1)原式 $=-5+7=2$ (2)原式 $=\sqrt[3]{2^2\times3^3}-3\sqrt[3]{2^2}$ $=3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{4}$ $=0$ (3)原式 $=\sqrt[3]{\frac{6}{9}\times(-\frac{3}{2})}=\sqrt[3]{-1}$ $=-1$
例題16	類題16
試將下列各式有理化： (1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 解： (1)原式 $=\frac{2\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (2)原式 $=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$ $=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$ $=\sqrt{3}-\sqrt{2}$	試將下列各式有理化： (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ 解： (1)原式 $=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2)原式 $=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$ $=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3}$ $=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$

例題17

請化簡 $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{-1}-(\sqrt{3}-1)^{-1}$ 。

解：

$$原式=\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}-\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3}-\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

類題17

請化簡 $\frac{2}{\sqrt{3}+1}+\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ 。

解：

$$原式=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}+\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}+\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

$$=\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1$$

$$=2\sqrt{3}$$

例題18

試比較 $\sqrt{5}+\sqrt{3},\sqrt{7}+1,\sqrt{6}+\sqrt{2}$ 之大小。

解：

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{5\times3}+3$$

$$=8+2\sqrt{15}$$

$$(\sqrt{7}+1)^2=7+2\sqrt{7}+1$$

$$=8+2\sqrt{7}$$

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2=6+2\sqrt{6\times2}+2$$

$$=8+2\sqrt{12}$$

$$\therefore \sqrt{5}+\sqrt{3}>\sqrt{6}+\sqrt{2}>\sqrt{7}+1$$

類題18

試比較 $3+\sqrt{3},2+\sqrt{8},1+\sqrt{11}$ 之大小。

解：

$$(3+\sqrt{3})^2=9+6\sqrt{3}+3=12+6\sqrt{3}$$

$$=12+2\sqrt{27}$$

$$(2+\sqrt{8})^2=4+4\sqrt{8}+8=12+4\sqrt{8}$$

$$=12+2\sqrt{32}$$

$$(1+\sqrt{11})^2=1+2\sqrt{11}+11$$

$$=12+2\sqrt{11}$$

$$\therefore 2+\sqrt{8}>3+\sqrt{3}>1+\sqrt{11}$$

第 1 單元　課後練習

1. $7^m \times 7^6 = 7^{11}$，$(9^3)^2 = 3^n$，則 $m+n =$ $\underline{\quad 17 \quad}$。

解：$m+6=11$，又 $[(3^2)^3]^2 = 3^{2\cdot3\cdot2} = 3^n$

$\therefore m+n = 5+12 = 17$

2. $4^{12} \times (\frac{3}{2})^{12} = k^{12}$，則 $k^{-2} =$ $\underline{\quad \frac{1}{36} \quad}$。

解：$(4\times\frac{3}{2})^{12} = k^{12}$，$k=6$，$\therefore k^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$

3. $(-\sqrt{18})^2 + (3^{-2}+2^{-3})^0 =$ $\underline{\quad 19 \quad}$。

解：原式 $=18+1=19$

4. $\frac{28^3\cdot 7^4}{2^2\cdot 14} = 2^n \cdot 7^m$，則 $n+m =$ $\underline{\quad 9 \quad}$。

解：$\frac{(2^2\cdot 7)^3\cdot 7^4}{2^2\cdot 2\cdot 7} = 2^{6-2-1}\cdot 7^{3+4-1} = 2^3\cdot 7^6$，$\therefore n+m = 3+6 = 9$

5.試比較大小：$3^8\times 2^8$ $\underline{\quad > \quad}$ 5^8。(請填入 $>, =$ 或 $<$ 其中一個)

解：$3^8\times 2^8 = (3\times 2)^8 = 6^8$，$\therefore 3^8\times 2^8 > 5^8$

6.若 13.6×10^9 為一個 a 位數的整數，6.9×10^{-6} 為一個自小數點以下第 b 位始不為0的小數，則 $a-b =$ $\underline{\quad 5 \quad}$。

解：$13.6\times 10^9 = 1.36\times 10^{10}$，$\therefore a = 10+1 = 11, b = 6$，$\therefore a-b = 11-6 = 5$

7.試化簡 $\sqrt{\frac{7}{3}} \div \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}} + \sqrt{18} =$ $\underline{\quad \frac{7}{2}\sqrt{2} \quad}$。

解：$\sqrt{\frac{7}{3}\times\frac{3}{14}} + \sqrt{18} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} = (\frac{1}{2}+3)\sqrt{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$

8.試比較大小：$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ $\underline{\quad < \quad}$ $\sqrt{6}+1$。(請填入 $>, =$ 或 $<$ 其中一個)

解：$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}, (\sqrt{6}+1)^2 = 7+2\sqrt{6}$，$\therefore \sqrt{6}+1 > \sqrt{2}+\sqrt{3}$

9.試化簡 $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}-2} =$ $\underline{\quad \sqrt{6}-2 \quad}$。

解：原式 $= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5} - \frac{\sqrt{5}+2}{5-4}$

$= \sqrt{6}+\sqrt{5}-(\sqrt{5}+2) = \sqrt{6}-2$

10. $\sqrt[3]{(-2)^3} + \sqrt{(-2)^2} =$ $\underline{\quad 0 \quad}$。

解：原式 $=-2+2=0$

第2單元　多項式

主題1　常用乘法公式

1.乘法分配律：$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 。

2.完全平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 。

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 。

3.平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 。

除了上述二次方的常用公式，未來也需要用到的三次方公式，可先預習：

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)^3-3ab(a+b)$ 。

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)^3+3ab(a-b)$ 。

例題1	類題1
請展開下列各式： (1) $(a+2)(b-3)$ (2) $(2x-3y)^2$ (3) $(\sqrt{5}+2\sqrt{3})^2$ (4) $(b+3\sqrt{5})(b-3\sqrt{5})$ 解： (1)原式 $=ab-3a+2b-6$ (2)原式 $=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2$ $=4x^2-12xy+9y^2$ (3)原式 $=\sqrt{5}^2+2\cdot\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2$ $=17+4\sqrt{15}$ (4)原式 $=b^2-(3\sqrt{5})^2=b^2-45$	請展開下列各式： (1) $(x-5)(y+6)$ (2) $(a+2b)^2$ (3) $(4-3\sqrt{2})^2$ (4) $(11+4\sqrt{2})(11-4\sqrt{2})$ 解： (1)原式 $=xy+6x-5y-30$ (2)原式 $=a^2+2\cdot a\cdot 2b+(2b)^2$ $=a^2+4ab+4b^2$ (3)原式 $=4^2-2\cdot 4\cdot 3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2$ $=34-24\sqrt{2}$ (4)原式 $=11^2-(4\sqrt{2})^2=121-32=89$

例題2	類題2
若 $a^2+b^2=48, ab=8$，則 $a+b=?$ 解： $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=48+2\cdot 8=64$ $\therefore a+b=\pm 8$	若 $a+b=6\sqrt{2}, ab=3$，則 $a^2+b^2=?$ 解： $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ $=(6\sqrt{2})^2-2\times 3$ $=66$

例題3	類題3
若 $a-b=5, ab=6$，則 $a+b=?$ 解： $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=25+24=49$ $\therefore a+b=\pm 7$	若 $(a+b)^2=12, (a-b)^2=6$，則 $ab=?$ 解： $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$，$12=6+4ab$ $4ab=6$，則 $ab=\frac{3}{2}$
例題4	類題4
若 $a+b=4, a^2-b^2=24$，則 $a-b=?$ 解： $\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2$ $\therefore 4\cdot(a-b)=24$ 故 $a-b=6$	若 $a^2-b^2=40$，且 $a-b=5$，則 $a+b=?$ 解： $\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2$ $\therefore (a+b)\cdot 5=40$ 故 $a+b=8$

例題5	類題5
設 x 為實數，且 $x+\frac{1}{x}=3$ ，試求： (1)展開 $(x+\frac{1}{x})^2$ (2) $x^2+\frac{1}{x^2}=?$ 解： (1) $(x+\frac{1}{x})^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+(\frac{1}{x})^2$ $=x^2+2+\frac{1}{x^2}$ (2)由(1) $3^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$ $\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=7$	設 x 為實數，且 $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$ ，試求： (1)展開 $(x-\frac{1}{x})^2$ (2) $x^2+\frac{1}{x^2}=?$ 解： (1) $(x-\frac{1}{x})^2=x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+(\frac{1}{x})^2$ $=x^2-2+\frac{1}{x^2}$ (2)由(1) $(\frac{3}{2})^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}$ $\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}$
例題6	類題6
利用公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ，求： (1) $(6-\sqrt[3]{2})(36+6\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ (2)有理化 $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$ 解： (1)原式 $=6^3-(\sqrt[3]{2})^3=216-2=214$ (2) $\frac{(\sqrt[3]{2}-1)}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}$ $=\frac{(\sqrt[3]{2}-1)}{2-1}=\sqrt[3]{2}-1$	利用公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ，求： (1) $(5+\sqrt[3]{3})(25-5\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})$ (2)有理化 $\frac{1}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}}$ 解： (1)原式 $=5^3+(\sqrt[3]{3})^3=125+3=128$ (2) $\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4})}$ $=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{4+2}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{6}$

主題2　多項式

1.多項式的定義：設n為非負整數，$a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0$為實數，則x的多項式可表示為

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$ 。

2.基本概念：設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$為$x$的多項式，其中$n$為非負整數。

(1)多項式的次數：若$a_n\neq 0$，由x的最高次數n，可說$f(x)$為x的n次多項式。

(2)係數：$a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0$分別為$x^n,x^{n-1},...,x^1,x^0$的係數，若$a_n\neq 0$，

a_n稱為$f(x)$的首項係數（領導係數），a_0稱為$f(x)$的常數項。

(3)常數多項式：$f(x)=a_0$，其中

① $f(x)=a_0,a_0\neq 0$，$f(x)$稱為零次多項式，次數為0，$\boxed{\text{例}}$ $f(x)=-2$。

② $f(x)=0$，$f(x)$稱為零多項式，不討論其次數。

3.多項式排列：

(1)降冪排列：依各項x的次數，由高而低排列。

(2)升冪排列：依各項x的次數，由低而高排列。

4.多項式的四則運算：

(1)加、減法：依x的同次數項，將其係數作加、減法合併。

(2)乘法：依分配律展開，再將同類項合併。

(3)除法：①長除法②分離係數法。

通常多項式四則運算之後，皆將其做降冪（或升冪）排列表示。

5.除法關係式：

若被除式$f(x)$除以除式$g(x)$，可得商式$q(x)$及餘式$r(x)$，其中$r(x)$可為0，或$r(x)$的次數需低於$g(x)$的次數，則可得下列關係式：

	被除式	=	除式	×	商式	+	餘式
即	$f(x)$	=	$g(x)$	×	$q(x)$	+	$r(x)$

例題7	類題7
下列何者為 x 的多項式？ (A) $3x^6+\sqrt{2}$　(B) $\frac{1}{x}+x^2+1$ (C) $\sqrt{6x+3}$　(D) $\lvert 5x+1\rvert$ (E) $2x^2-1=0$ 解： x 的次數 n 為非負整數 故 x 不可在分母、根號及絕對值 又(E)為方程式，故選(A)	下列何者為 x 的多項式？ (A) $5x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{x^2+1}$ (C) $\sqrt{x}+x^2$　(D) $\lvert x\rvert-1$ (E) $6x-1=0$ 解： (E)為方程式，故選(A)
例題8	類題8
已知 $f(x)=6x^5-7x^3+11x-5$，試求： (1) x^3 係數，x^2 係數各為何？ (2)常數項 (3)首項係數 (4) $f(x)$ 的次數 解： (1) x^3 係數 $=-7$，x^2 係數 $=0$ (2) -5 (3)6 (4)5	已知 $g(x)=101x^4+100x^3$，試求： (1) x^3 係數，x 項係數各為何？ (2)常數項 (3)首項係數 (4) $f(x)$ 的次數 解： (1) x^3 係數 $=100$，x 項係數 $=0$ (2)0 (3)101 (4)4
例題9	類題9
若 $ax^3+(b+2)x^2-5x+3$ 為一次多項式，則 a,b 值各為何？ 解： $a=0,b+2=0$ $\therefore a=0,b=-2$	若 $(a+3)x^2+(b-5)x-3$ 為常數多項式，則 $a+b=?$ 解： $a+3=0,b-5=0$ $\therefore a=-3,b=5$ 則 $a+b=2$

例題10

試化簡下列各式，並降冪排列：

(1) $(6x^2-5x)+2(5x-x^2)-3(2x+1)$

(2) $(5x-6)(7x+2)-x(2x+1)$

(3) $(-6x+5)^2+(-3x-2)^2$

(4) $(5x-4)(5x+4)$

解：

(1)原式 $=6x^2-5x+10x-2x^2-6x-3$

$\quad\quad=4x^2-x-3$

(2)原式 $=35x^2+10x-42x-12-2x^2-x$

$\quad\quad=33x^2-33x-12$

(3)原式 $=36x^2-60x+25+9x^2+12x+4$

$\quad\quad=45x^2-48x+29$

(4)原式 $=(5x)^2-4^2=25x^2-16$

類題10

試化簡下列各式，並降冪排列：

(1) $5(6-2x+3x^2)-2(x+1)$

(2) $(4x-1)(6-x)+3x(x-5)$

(3) $(6x-5)^2-(3x+2)^2$

(4) $(1-4x)(1+4x)$

解：

(1)原式 $=30-10x+15x^2-2x-2$

$\quad\quad=15x^2-12x+28$

(2)原式 $=24x-4x^2-6+x+3x^2-15x$

$\quad\quad=-x^2+10x-6$

(3)原式 $=36x^2-60x+25-(9x^2+12x+4)$

$\quad\quad=27x^2-72x+21$

(4)原式 $=1^2-(4x)^2=1-16x^2$

例題11

利用長除法，求 $(2x^3-13x^2+10)$ 除以 $(2x+3)$ 之商式、餘式。

解：

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & x^2 & - & 8x & + & 12 & & \\
\hline
2x+3 & 2x^3 & - & 13x^2 & + & 0x & + & 10 \\
 & 2x^3 & + & 3x^2 & & & & \\
\hline
 & & - & 16x^2 & + & 0x & & \\
 & & - & 16x^2 & - & 24x & & \\
\hline
 & & & & & 24x & + & 10 \\
 & & & & & 24x & + & 36 \\
\hline
 & & & & & & - & 26
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式 $=x^2-8x+12$

餘式 $=-26$

類題11

利用分離係數法，求 $(6x^3-5x^2+5x+1)\div(2x^2-x-1)$ 之商式及餘式。

解：

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 3 & - & 1 & & & & \\
\hline
2-1-1 & 6 & - & 5 & + & 5 & + & 1 \\
 & 6 & - & 3 & - & 3 & & \\
\hline
 & & - & 2 & + & 8 & + & 1 \\
 & & - & 2 & + & 1 & + & 1 \\
\hline
 & & & & & 7 & + & 0
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式 $=3x-1$

餘式 $=7x$

<table>
<tr><td>例題12</td><td>類題12</td></tr>
<tr><td>若多項式 A 除以 $3x+4$，得商式

x^2+10，餘式5，求 A。

解：

$A=(3x+4)(x^2+10)+5$

$=3x^3+30x+4x^2+40+5$

$=3x^3+4x^2+30x+45$</td><td>若 $(5x-3)$ 除 (ax^3+bx^2+cx+d)，得商式

$-x+2$，餘式 -3，則 $a+c=?$

解：

ax^3+bx^2+cx+d

$=(5x-3)(-x+2)+(-3)$

$=-5x^2+10x+3x-6-3$

$=-5x^2+13x-9$

$\therefore a=0,c=13$，$\therefore a+c=13$</td></tr>
<tr><td>例題13</td><td>類題13</td></tr>
<tr><td>若 $4x^3-5x^2+9x$ 除以 $(ax+b)$，得商式

x^2-x+2，餘式2，則 $a=?b=?$

解：

$4x^3-5x^2+9x=(ax+b)(x^2-x+2)+2$

$\therefore 4x^3-5x^2+9x-2=(ax+b)(x^2-x+2)$

可利用長除法

$\begin{array}{r|rrrr} & 4x & -1 & & \\ \hline x^2-x+2 & 4x^3 & -5x^2 & +9x & -2 \\ & 4x^3 & -4x^2 & +8x & \\ \hline & & -x^2 & +x & -2 \\ & & -x^2 & +x & -2 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$

$\therefore ax+b=4x-1$

$\therefore a=4,b=-1$</td><td>設多項式 B，若 x^2+6x-5 除以 B 得商式

$x+1$，餘式 -10，求 B。

解：

$x^2+6x-5=B(x+1)+(-10)$

$\therefore x^2+6x+5=B(x+1)$

可利用長除法

$\begin{array}{r|rrr} & x & +5 & \\ \hline x+1 & x^2 & +6x & +5 \\ & x^2 & +x & \\ \hline & & 5x & +5 \\ & & 5x & +5 \\ \hline & & & 0 \end{array}$

$\therefore$ 多項式 $B=x+5$</td></tr>
</table>

主題3　因式分解

1.若 A,B,C 皆為多項式，當 $A\div B=C$ 為整除（餘式$=0$）時，可得 $A=B\times C$，此時稱 B,C 為 A 的因式，A 為 B,C 的倍式。

2.因式分解：將 x 的多項式表示成若干個多項式乘積。其常用方法有

(1)提出公因式　(2)利用平方差公式或完全平方公式　(3)十字交乘

例題14	類題14
試將下列各式因式分解： (1) $x-5x^2$ (2) $(a+b)^2-(a+b)$ (3) $(7-4x)^2-(2x+3)(4x-7)$ 解： (1)原式$=x(1-5x)=-x(5x-1)$ (2)原式$=(a+b)[(a+b)-1]$ $=(a+b)(a+b-1)$ (3)原式$=(4x-7)^2-(2x+3)(4x-7)$ $=(4x-7)[(4x-7)-(2x+3)]$ $=(4x-7)(2x-10)$ $=2(4x-7)(x-5)$	試將下列各式因式分解： (1) $6y^3-2y^2$ (2) $(3x+1)^2+6x(3x+1)$ (3) $(5x-1)(3x-7)-(1-5x)^2$ 解： (1)原式$=2y^2(3y-1)$ (2)原式$=(3x+1)[(3x+1)+6x]$ $=(3x+1)(9x+1)$ (3)原式$=(5x-1)(3x-7)-(5x-1)^2$ $=(5x-1)[(3x-7)-(5x-1)]$ $=(5x-1)(-2x-6)$ $=-2(5x-1)(x+3)$

例題15

試將下列各式因式分解：

(1) x^2-81

(2) $4a^2-20a+25$

(3) $(x+3)^2-8(x+3)+16$

解：

(1)原式 $=(x+9)(x-9)$

(2)原式 $=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 5+5^2=(2a-5)^2$

(3)原式 $=[(x+3)-4]^2=(x-1)^2$

類題15

試將下列各式因式分解：

(1) y^2-121

(2) $y^2-16y+64$

(3) $(x-6)^2-6(x-6)+9$

解：

(1)原式 $=(y+11)(y-11)$

(2)原式 $=y^2-2\cdot y\cdot 8+8^2=(y-8)^2$

(3)原式 $=[(x-6)-3]^2=(x-9)^2$

例題16

試將下列各式因式分解：

(1) x^2-5x+6

(2) $6x^2-x-2$

(3) $x^3+9x^2-4x-36$

解：

(1) $\begin{array}{ccc} 1 & \times & -2 \\ 1 & & -3 \\ \hline & -5 & \end{array}$ $\therefore$原式 $=(x-2)(x-3)$

(2) $\begin{array}{ccc} 2 & \times & 1 \\ 3 & & -2 \\ \hline & -1 & \end{array}$ $\therefore$原式 $=(2x+1)(3x-2)$

(3)原式 $=x^2(x+9)-4(x+9)$

$=(x+9)(x^2-4)$

$=(x+9)(x+2)(x-2)$

類題16

試將下列各式因式分解：

(1) $x^2+3x-28$

(2) $15x^2+x-6$

(3) $3x^3-6x^2+x-2$

解：

(1) $\begin{array}{ccc} 1 & \times & 7 \\ 1 & & -4 \\ \hline & 3 & \end{array}$ $\therefore$原式 $=(x+7)(x-4)$

(2) $\begin{array}{ccc} 5 & \times & -3 \\ 3 & & 2 \\ \hline & 1 & \end{array}$ $\therefore$原式 $=(5x-3)(3x+2)$

(3)原式 $=3x^2(x-2)+(x-2)$

$=(x-2)(3x^2+1)$

第2單元　課後練習

1.若 $f(x)=ax^3+(b-2)x^2+(c+3)x-5$ 為常數多項式，則 $a+b+c=$__-1__。

解：$f(x)=-5$，$\therefore a=0,b=2,c=-3$，則 $a+b+c=-1$

2.將 $(6x+7)(x-5x^2)$ 展開後為一 n 次多項式，且領導係數為 m，x^2 項係數為 k，則 $n+m+k=$

-56__。

解：$(6x+7)(x-5x^2)=6x^2-30x^3+7x-35x^2=-30x^3-29x^2+7x$

則 $n=3,m=-30,k=-29$

$\therefore n+m+k=-56$

3.若多項式 $f(x)$ 除以 $5x-3$ 得商式 $2x+5$，餘式為 -6，則 $f(x)$ 為__$10x^2+19x-21$__。

解：$f(x)=(5x-3)(2x+5)+(-6)=10x^2+25x-6x-15-6=10x^2+19x-21$

4.求 $(3x^2-2)$ 除 $(6x^3-3x^2-5x-7)$ 之餘式為__$-x-9$__。

解：利用長除法：

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 2x & - & 1 & & & & \\
\cline{2-8}
3x^2+0x-2 & 6x^3 & - & 3x^2 & - & 5x & - & 7 \\
 & 6x^3 & + & 0x^2 & - & 4x & & \\
\cline{2-8}
 & & - & 3x^2 & - & x & - & 7 \\
 & & - & 3x^2 & + & 0x & + & 2 \\
\cline{2-8}
 & & & & - & x & - & 9
\end{array}
$$

$\therefore$餘式 $=-x-9$

5.已知 $a-b=3,ab=3$，則 $a^2+b^2=$__15__。

解：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$\therefore 9=a^2-6+b^2$，$\therefore a^2+b^2=15$

6.已知 $a^2+b^2=\dfrac{5}{2},ab=\dfrac{3}{4}$，則 $a-b=$__±1__。

解：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=\dfrac{5}{2}-2\times\dfrac{3}{4}=1$

$\therefore a-b=\pm1$

7.若 $(7x+a)^2=49x^2+bx+4$ ，且 $a<0$ ，則 $b=$ __-28__ 。

解： $(7x+a)^2=49x^2+14ax+a^2$ ，$\therefore a^2=4$ ，則 $a=-2$（2不合，$\because a<0$ ）

則 $b=14a=-28$

8.將 x^4-81 因式分解可得 $(x^2+p)(x+q)(x+r)$ ，則 $p+q+r=$ __9__ 。

解： $x^4-81=(x^2)^2-9^2=(x^2+9)(x^2-9)=(x^2+9)(x+3)(x-3)$

$\therefore p+q+r=9+3+(-3)=9$

9.因式分解 $x^3-x^2-12x=$ __$x(x-4)(x+3)$__ 。

解：原式 $=x(x^2-x-12)=x(x-4)(x+3)$

$$\begin{array}{cc} 1 & -4 \\ & \times \\ 1 & 3 \\ \hline & -1 \end{array}$$

10.若 $4x^2-kx+12$ 為 $4x-3$ 的倍式，則 $k=$ __19__ 。

解：利用長除法， $4x^2-kx+12$ 可整除 $4x-3$ ，即餘式為0

$$\begin{array}{r|llll} & x & - & 4 & \\ \hline 4x-3 & 4x^2 & - & kx & +\ 12 \\ & 4x^2 & - & 3x & \\ \hline & & & (-k+3)x & +\ 12 \\ & & & -16x & +\ 12 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

$\therefore -k+3-(-16)=0$

則 $k=19$

〈另解〉觀察係數 $4x^2-kx+12=(4x-3)(ax+b)$ ，可得 $a=1,b=-4$

則 $(4x-3)(x-4)=4x^2-19x+12$，$\therefore k=19$

第 3 單元　方程式

主題 1　一元一次方程式

1.一元一次方程式 $ax+b=0$ 的解：

(1)若 $a\neq 0$，則其解 $x=-\dfrac{b}{a}$。

(2)若 $a=0$，且 $b\neq 0$，則 $ax+b=0$ 無解。

(3)若 $a=0$，且 $b=0$，則 x 為任意實數。

2.絕對值方程式：

(1)絕對值的幾何意義：在數線上，$|x|$ 表示 x 點到原點的距離，故 $|x-a|$ 表示 x 點與 a 點兩點之間的距離，且 $|x-a|=|a-x|$。

(2)互為相反數的兩數，其絕對值相等，即 $|x|=|-x|$。

(3)若 x 為任意實數，則 $|x|\geq 0$。

(4)因為 $|x|=\begin{cases} x, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$，故 $|x-a|=\begin{cases} x-a & ,x\geq a \\ -(x-a)=-x+a, & x<a \end{cases}$。

例題1	類題1
試解方程式： (1) $12x+31=67$ (2) $6(x-1)-2(3-5x)=4x-9$ 解： (1) $12x=36$ $\Rightarrow x=\dfrac{36}{12}=3$ (2) $6x-6-6+10x=4x-9$ $\Rightarrow 12x=3 \Rightarrow x=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$	試解方程式： (1) $5x-3=7$ (2) $3(x+1)+5(2x-3)=x$ 解： (1) $5x=10$ $\Rightarrow x=\dfrac{10}{5}=2$ (2) $3x+3+10x-15=x$ $\Rightarrow 12x=12 \Rightarrow x=1$

例題2	類題2
試解方程式： (1) $\frac{9}{4}x-\frac{1}{3}=\frac{5}{2}x+1$ (2) $\frac{6x-1}{5}-\frac{x-5}{3}=\frac{4(x+1)}{15}$ 解： (1) $27x-4=30x+12$ $\Rightarrow -3x=16 \Rightarrow x=-\frac{16}{3}$ (2) $3(6x-1)-5(x-5)=4(x+1)$ $\Rightarrow 9x=-18 \Rightarrow x=-2$	試解方程式： (1) $\frac{3}{2}x+1=\frac{5}{4}x-5$ (2) $\frac{2x+1}{4}+\frac{x-1}{3}=2$ 解： (1) $6x+4=5x-20 \Rightarrow x=-24$ (2) $6x+3+4x-4=24$ $\Rightarrow 10x=25 \Rightarrow x=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$
例題3	類題3
試解方程式： (1) $4x+3=4(x-7)$ (2) $5(x+1)-9=4(x-1)+x$ 解： (1) $4x+3=4x-28 \Rightarrow 3=-28$ 不成立 $\therefore x$ 無解 (2) $5x+5-9=4x-4+x \Rightarrow 0\cdot x=0$ $\therefore x$ 為任意實數	試解方程式： (1) $6x-2(x-1)=4x+3$ (2) $3(2x+6)=2(3x+9)$ 解： (1) $6x-2x+2=4x+3 \Rightarrow 2=3$ 不成立 $\therefore x$ 無解 (2) $6x+18=6x+18 \Rightarrow 0\cdot x=0$ $\therefore x$ 為任意實數
例題4	類題4
試求 x 值： (1) $\|x\|=0$　(2) $\|x\|=3$　(3) $\|x\|=-5$ 解： (1) $\|x\|=0 \Rightarrow x=0$ (2) $\|x\|=3 \Rightarrow x=\pm 3$ (3) $\|x\|=-5$ 不成立（$\because \|x\|\geq 0$） $\therefore x$ 無解	試求 x 值： (1) $\|x\|=2.99$　(2) $\|x\|=-101$ 解： (1) $\|x\|=2.99 \Rightarrow x=\pm 2.99$ (2) $\|x\|=-101$ 不成立 ($\because \|x\|\geq 0$) $\therefore x$ 無解

例題5	類題5
試求 x 值： (1) $\lvert x-1\rvert=4$ (2) $\lvert 2x+3\rvert=5$ (3) $\lvert 3x-7\rvert=0$ (4) $\lvert 3-x\rvert=-1$ 解： (1) $x-1=\pm4\Rightarrow x=5$ 或 -3 (2) $2x+3=\pm5\Rightarrow x=1$ 或 -4 (3) $3x-7=0\Rightarrow x=\frac{7}{3}$ (4) $\lvert 3-x\rvert=-1<0$ 不成立，$\therefore x$ 無解	試求 x 值： (1) $\lvert x+2\rvert=5$ (2) $\lvert 3x-1\rvert=8$ (3) $\lvert 5x-6\rvert=0$ (4) $\lvert 5-100x\rvert=-2$ 解： (1) $x+2=\pm5\Rightarrow x=3$ 或 -7 (2) $3x-1=\pm8\Rightarrow x=3$ 或 $-\frac{7}{3}$ (3) $5x-6=0\Rightarrow x=\frac{6}{5}$ (4) $\lvert 5-100x\rvert=-2<0$ 不成立，$\therefore x$ 無解
例題6	類題6
試求 a,b 各值： (1) $\lvert 3a-1\rvert+\lvert 2b+5\rvert=0$ (2) $\lvert 5a+1\rvert+(b-2)^2=0$ 解： (1) $\lvert 3a-1\rvert=0$ 且 $\lvert 2b+5\rvert=0$ $\therefore a=\frac{1}{3},b=-\frac{5}{2}$ (2) $\lvert 5a+1\rvert=0$ 且 $(b-2)^2=0$ $\therefore a=-\frac{1}{5},b=2$	(1)若 $\lvert 2a+6\rvert+\lvert 3b-2\rvert=0$，試求 a,b 之值。 (2)若 $\lvert 5x+3\rvert+(2y-5)^2=0$，試求 $x\cdot y$ 之值。 解： (1) $\lvert 2a+6\rvert=0$ 且 $\lvert 3b-2\rvert=0$ $\therefore a=-3,b=\frac{2}{3}$ (2) $\lvert 5x+3\rvert=0$ 且 $(2y-5)^2=0$ $\therefore x=-\frac{3}{5},y=\frac{5}{2}\Rightarrow x\cdot y=-\frac{3}{2}$

例題7	類題7
若 a,b 為整數，則下列各式中之 a,b 各為何？ (1) $2\|a+5\|+3\|b-7\|=0$ (2) $\|a-1\|+3\|12-b\|=1$ 解： (1) $\|a+5\|=0$ 且 $\|b-7\|=0$ $\therefore a=-5, b=7$ (2) $\|a-1\|=1$ 且 $\|12-b\|=0$ $\therefore a=2$ 或 $0, b=12$	若 x,y 為整數，且滿足下列各式，則 $x+y$ 之值各為何？ (1) $12\|x\|+32\|y+1\|=0$ (2) $16\|x+3\|+\|y-9\|=1$ 解： (1) $\|x\|=0$ 且 $\|y+1\|=0$ $\therefore x=0, y=-1$，則 $x+y=-1$ (2) $\|x+3\|=0$ 且 $\|y-9\|=1$ $\therefore x=-3, y=10$ 或 8 則 $x+y=7$ 或 5
例題8	類題8
若 $0<x<3$，試化簡 $2\|x+5\|-\|x-6\|$。 解： 原式 $=2(x+5)-[-(x-6)]=3x+4$	若 $-2\le x\le 2$，試化簡 $\|x-3\|+\|x+3\|$。 解： 原式 $=-(x-3)+(x+3)=6$

主題2　一元二次方程式

1.設 $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$，即為一元二次方程式，通常求出解 x 的方法有：

(1)因式分解（詳見第2單元）

(2)配方法：若 $ax^2+bx+c=0$，且 $a\neq 0$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\therefore (x+\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$（x 項係數一半的平方）

則 $x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{-4ac+b^2}{4a^2}}$

(3)代公式法：若 a,b,c 皆為實數，且 $a\neq 0$，由(2)結論可得 $ax^2+bx+c=0$ 根的公式為

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，其中令 b^2-4ac 為根的判別式。

①$b^2-4ac>0 \Leftrightarrow$ 方程式有二相異實根。

②$b^2-4ac=0 \Leftrightarrow$ 方程式有二相等實根。

③$b^2-4ac<0 \Leftrightarrow$ 方程式無實根。

2.根與係數的關係：

(1)在解一元二次方程式時，若方程式可因式分解為 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$，則可知二根為 α,β。

反之，將其展開可得 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$（$x^2-$和 $x+$ 積 $=0$）。

(2)若 α,β 為 $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ 之二根，則 $\begin{cases}\text{二根和}\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\\ \text{二根積}\alpha\beta=\frac{c}{a}\end{cases}$。

例題9	類題9
求下列方程式的根： (1) $5x^2=6$　(2) $x^2+3=0$ 解： (1) $x^2=\frac{6}{5}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{6}{5}}=\pm\frac{\sqrt{30}}{5}$ (2) $x^2=-3<0$，不合，$\therefore x$ 無實根	求下列方程式的根： (1) $x^2-7=0$　(2) $(x-3)^2=0$ 解： (1) $x^2=7\Rightarrow x=\pm\sqrt{7}$ (2) $x-3=0\Rightarrow x=3$（二相等實根）

<table>
<tr><td>例題10</td><td align="right">類題10</td></tr>
<tr><td>

利用因式分解求下列方程式的根：

(1) $x(x-2)=0$

(2) $5x^2-6x=0$

(3) $6x^2-5x-1=0$

(4) $(x-1)^2+6(x-1)=0$

解：

(1) $x=0$ 或 $x-2=0$ ，故 $x=0$ 或 2

(2) $x(5x-6)=0 \Rightarrow x=0$ 或 $\frac{6}{5}$

(3) $(6x+1)(x-1)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{6}$ 或 1

(4) $(x-1)[(x-1)+6]=0$

$\Rightarrow x=1$ 或 -5

</td><td>

求下列方程式的根：

(1) $(3x+1)(x-1)=0$

(2) $7x^2=10x^2-5x$

(3) $12x^2-5x-2=0$

(4) $(2x-3)-5(2x-3)^2=0$

解：

(1) $x=-\frac{1}{3}$ 或 1

(2) $3x^2-5x=0 \Rightarrow x(3x-5)=0$

$\Rightarrow x=0$ 或 $\frac{5}{3}$

(3) $(3x-2)(4x+1)=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$ 或 $-\frac{1}{4}$

(4) $(2x-3)[1-5(2x-3)]=0$

$\Rightarrow (2x-3)(16-10x)=0$

$\Rightarrow x=\frac{3}{2}$ 或 $\frac{8}{5}$

</td></tr>
<tr><td>例題11</td><td align="right">類題11</td></tr>
<tr><td>

試將下列各式配方：

(1) x^2-6x+3

(2) $3x^2-6x+1$

(3) $-2x^2+x-1$

解：

(1) $x^2-6x+3=(x-3)^2+3-9$

$=(x-3)^2-6$

(2) $3x^2-6x+1=3(x^2-2x)+1$

$=3(x-1)^2+1-3$

$=3(x-1)^2-2$

(3) $-2x^2+x-1=-2(x^2-\frac{1}{2}x)-1$

$=-2(x-\frac{1}{4})^2-1+\frac{2}{16}$

$=-2(x-\frac{1}{4})^2-\frac{7}{8}$

</td><td>

試將下列各式配方：

(1) x^2+8x-5

(2) $\frac{1}{2}x^2+x-2$

(3) $-3x^2+12x+1$

解：

(1) $x^2+8x-5=(x+4)^2-5-16$

$=(x+4)^2-21$

(2) $\frac{1}{2}x^2+x-2=\frac{1}{2}(x^2+2x)-2$

$=\frac{1}{2}(x+1)^2-2-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{5}{2}$

(3) $-3x^2+12x+1=-3(x^2-4x)+1$

$=-3(x-2)^2+1+12$

$=-3(x-2)^2+13$

</td></tr>
</table>

例題12

利用配方法求 $2x^2-10x+3=0$ 的根。

解：

$$x^2-5x+\frac{3}{2}=0$$

$$\Rightarrow (x-\frac{5}{2})^2=-\frac{3}{2}+\frac{25}{4}$$

$$\therefore x-\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{19}{4}}$$

$$\Rightarrow x=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$$

類題12

利用配方法求 $3x^2-12x-7=0$ 的根。

解：

$$x^2-4x-\frac{7}{3}=0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2=\frac{7}{3}+4$$

$$\therefore x-2=\pm\sqrt{\frac{19}{3}}$$

$$\Rightarrow x=2\pm\frac{\sqrt{57}}{3}$$

例題13

利用根的公式求下列方程式的根：

(1) $2x^2-10x+3=0$

(2) $3x^2+5x-1=0$

解：

$$(1)\ x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{19}}{2}$$

$$(2)\ x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot3\cdot(-1)}}{2\cdot3}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{37}}{6}$$

類題13

利用根的公式求下列方程式的根：

(1) $3x^2-12x-7=0$

(2) $-2x^2-x+21=0$

解：

$$(1)\ x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot3\cdot(-7)}}{2\cdot3}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{57}}{3}$$

$$(2)\ x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-2)\cdot21}}{2\cdot(-2)}$$

$$=-\frac{1\pm\sqrt{169}}{4}$$

$=-\dfrac{7}{2}$ 或3

例題14	類題14
試利用根的判別式，判斷方程式的根。若有實根，則其根各為何？ (1) $x^2+x+5=0$ (2) $x^2-6x+9=0$ (3) $5x^2+9x-2=0$ 解： (1) $1^2-4\cdot1\cdot5<0$，無實根 (2) $(-6)^2-4\cdot1\cdot9=0$，有二相等實根（重根） $\Rightarrow(x-3)^2=0$，$\therefore x=3$ (3) $9^2-4\cdot5\cdot(-2)>0$，有二相異實根 $(x+2)(5x-1)=0\Rightarrow x=-2$ 或 $\dfrac{1}{5}$	試利用根的判別式，判斷方程式的根。若有實根，則其根各為何？ (1) $2x^2-5x+4=0$ (2) $4x^2-12x+9=0$ (3) $3x^2+10x+8=0$ 解： (1) $(-5)^2-4\cdot2\cdot4<0$，無實根 (2) $(-12)^2-4\cdot4\cdot9=0$，有二相等實根（重根） $\Rightarrow(2x-3)^2=0$，$\therefore x=\dfrac{3}{2}$ (3) $10^2-4\cdot3\cdot8>0$，有二相異實根 $(3x+4)(x+2)=0$ $\Rightarrow x=-\dfrac{4}{3}$ 或 -2
例題15	類題15
若 $x^2+6x-4m+5=0$ 有實根，則 m 的範圍為何？ 解： 有實根包含相等、相異實根 $\therefore 6^2-4\cdot1\cdot(-4m+5)\ge0$ $\Rightarrow 36+16m-20\ge0\Rightarrow m\ge-1$	若 $9x^2-2mx+4=0$ 有二相等實根，則 m 值為何？ 解： $(-2m)^2-4\cdot9\cdot4=0$ $\Rightarrow 4m^2-144=0\Rightarrow m=\pm6$

例題16	類題16
若 $ax^2+x+c=0$ 有二根 $\frac{1}{3},-\frac{4}{3},a\neq 0$ ，則 $a+c=?$ 解： $(x-\frac{1}{3})(x+\frac{4}{3})=0$ 展開得 $x^2+x-\frac{4}{9}=0$ 比對係數 $a+c=1+(-\frac{4}{9})=\frac{5}{9}$	若 $2x^2+bx+c=0$ 有二根 $5,-2$ ，則 $b-c=?$ 解： $(x-5)(x+2)=0$ $\Rightarrow x^2-3x-10=0$ $\Rightarrow 2x^2-6x-20=0$ $\therefore b-c=(-6)-(-20)=14$
例題17	類題17
若 α,β 為 $2x^2+3x-4=0$ 之二根，則 (1) $\alpha+\beta=?$　(2) $\alpha\beta=?$　(3) $\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}=?$ 解： (1) $\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$ (2) $\alpha\beta=\frac{-4}{2}=-2$ (3) $\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}=\frac{2\alpha+2\beta}{\alpha\beta}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$	若 α,β 為 $x^2-5x-2=0$ 之二根，則 (1) $\alpha+\beta=?$　(2) $\alpha\beta=?$　(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=?$ 解： (1) $\alpha+\beta=5$ (2) $\alpha\beta=-2$ (3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{5}{2}$
例題18	類題18
有3個連續正偶數，此三數的平方和為596，則最大數為何？ 解： 設三偶數 $x-2,x,x+2$ $(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=596$ $\Rightarrow 3x^2+8=596\Rightarrow x=14$（負不合） $\therefore$最大數為 $14+2=16$	若三連續正整數的最大數與最小數乘積為399，則最小數為何？ 解： 設三整數 $x-1,x,x+1$ $(x+1)(x-1)=399$ $\Rightarrow x^2-1=399\Rightarrow x=20$（負不合） $\therefore$最小數為 $20-1=19$

第 3 單元　課後練習

1.方程式$5(2x-3)-7(3x-5)+9=5x-3$的根為__2__。

解：$-11x+29=5x-3 \Rightarrow -16x=-32 \Rightarrow x=2$

2.若$\frac{3x-1}{4}+7=ax-2$的根為-5，則$5(x-7)+a(4x+1)=0$的根為__36__。

解：$x=-5$代入得$\frac{-16}{4}+7=-5a-2$，$\therefore a=-1$

$\therefore 5(x-7)-1(4x+1)=0 \Rightarrow x=36$

3.若$|2x+9|+5|3y-1|=0$，則$xy=$__$-\frac{3}{2}$__。

解：$2x+9=0 \Rightarrow x=-\frac{9}{2}$；$3y-1=0 \Rightarrow y=\frac{1}{3}$，$\therefore xy=-\frac{3}{2}$

4.若$|5x+6|=4$，則$x=$__$-\frac{2}{5}$或-2__。

解：$5x+6=\pm 4 \Rightarrow x=-\frac{2}{5}$或$-2$

5.方程式$5(x^2-x)=7x$之解為__0或$\frac{12}{5}$__。

解：$5x^2-5x=7x \Rightarrow 5x^2-12x=0 \Rightarrow x(5x-12)=0 \Rightarrow x=0$或$\frac{12}{5}$

6.方程式$9x^2+6x-8=0$之解為__$-\frac{4}{3}$或$\frac{2}{3}$__。

解：利用十字交乘$\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 3 & -2 \\ \hline & 6 \end{array}$，$\therefore (3x+4)(3x-2)=0 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$或$\frac{2}{3}$

7.方程式$6x^2-2x-1=0$之解為__$\frac{1\pm\sqrt{7}}{6}$__。

解：因無法因式分解，所以可直接代公式$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

$$\therefore x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 6(-1)}}{2\times 6}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{6}$$

8.若$x^2+bx+c=0$的二根為$2,-3$，則$bc=$__-6__。

解：方程式為$(x-2)[x-(-3)]=0$，$\therefore x^2+x-6=0$，$\therefore bc=1\times(-6)=-6$

9.已知α,β為$x^2+5x-7=0$之二根，則$\frac{5}{\alpha}+\frac{5}{\beta}=$__$\frac{25}{7}$__。

解：$\alpha+\beta=-5,\alpha\beta=-7 \Rightarrow \frac{5}{\alpha}+\frac{5}{\beta}=\frac{5(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{25}{7}$

10.已知有一果園共有450棵果樹，以排列式種植，其每列的果樹數目為列數的3倍多15棵，則每列種植__45__棵果樹。

解：令列數為x，每列種$3x+15$棵

$\therefore x(3x+15)=450 \Rightarrow 3x^2+15x-450=0 \Rightarrow (x-10)(x+15)=0 \Rightarrow x=10$（$-15$不合）

$\therefore$每列種了$3\times 10+15=45$棵

第4單元　不等式

主題1　一元一次不等式

1.一元一次不等式：包含一未知數，且其次方為一次的不等式。利用移項，可化為

$ax+b>0, ax+b\ge 0, ax+b<0, ax+b\le 0$ 的形式，其中 a,b 為常數，$a\ne 0$ 。

2.運算性質：若 $a>b$ ，c 為任意實數

(1) $a+c>b+c$ 。

(2) $a-c>b-c$ 。

(3)若 $c>0$ ，則 $ac>bc$ 。反之，$c<0$ ，則 $ac<bc$ 。

(4)若 $c>0$ ，則 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ 。反之，$c<0$ ，則 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ 。

3.不等式 $ax+b>0$ 的解：

(1)若 $a>0, ax>-b$ ，則 $x>\frac{-b}{a}$ 。

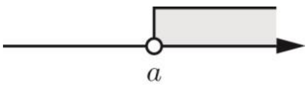
(2)若 $a<0, ax>-b$ ，則 $x<\frac{-b}{a}$ 。($\ge,<,\le$ 之不等式則依此類推)

4.圖示一元一次不等式的解：

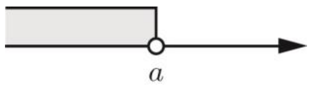
在不等式的圖示中，我們將包含的端點以實心圓點「•」表示，不包含的端點以空心圓點「。」表示。

設 a,b 為常數，且 $a<b$

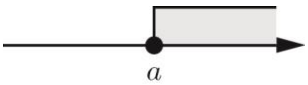
(1) $x>a$



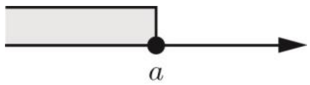
(2) $x<a$



(3) $x\ge a$



(4) $x\le a$



(5) $a<x<b$

(6) $a\le x<b$

(7) $a<x\le b$

(8) $a\le x\le b$

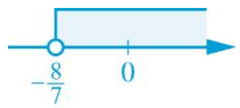
例題1

圖解一元不等式：

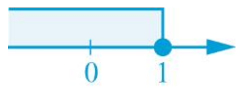
(1) $7x+3>-5$　(2) $2-5x\ge -3$

解：

(1) $7x>-8\Rightarrow x>-\dfrac{8}{7}$



(2) $-5x\ge -5\Rightarrow x\le 1$



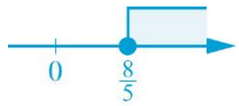
類題1

圖解一元不等式：

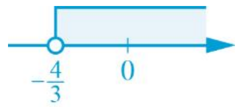
(1) $5x-1\ge 7$　(2) $-6x-3<5$

解：

(1) $5x\ge 8\Rightarrow x\ge \dfrac{8}{5}$



(2) $-6x<8\Rightarrow x>-\dfrac{4}{3}$



例題2

求不等式的解：

(1) $2x-1\le 3x-5$

(2) $\dfrac{1}{3}x-2<\dfrac{1}{2}x+1$

解：

(1) $-x\le -4\Rightarrow x\ge 4$

(2) $2x-12<3x+6$

$\Rightarrow -x<18\Rightarrow x>-18$

類題2

求不等式的解：

(1) $6x+3>4x-1$

(2) $\dfrac{5}{2}x-3<\dfrac{11}{4}x-1$

解：

(1) $2x>-4\Rightarrow x>-2$

(2) $10x-12<11x-4$

$\Rightarrow -x<8\Rightarrow x>-8$

例題3

求不等式 $5(x+6)-7(x-1)\ge 0$ 的解。

解：

$5x+30-7x+7\ge 0$

$\Rightarrow -2x\ge -37$

$\Rightarrow x\le \dfrac{37}{2}$

類題3

求不等式 $6(1-x)+8(2x-3)\le 5(x+1)$ 的解。

解：

$6-6x+16x-24\le 5x+5$

$\Rightarrow 5x\le 23$

$\Rightarrow x\le \dfrac{23}{5}$

例題4

圖解不等式並寫出其解：

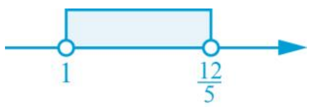
(1) $6<5x+1<13$

(2) $-2<\dfrac{4x-1}{3}\le 5$

(3) $6+8(x+1)<5(x+3)\le 7x-5$

解：

(1) $5<5x<12\Rightarrow 1<x<\dfrac{12}{5}$



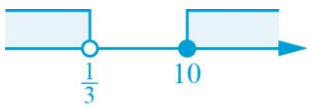
(2) $-6<4x-1\le 15$

$\Rightarrow -5<4x\le 16\Rightarrow -\dfrac{5}{4}<x\le 4$

(3) $\begin{cases}6+8(x+1)<5(x+3)\\ 5(x+3)\le 7x-5\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}3x<1\\ -2x\le -20\end{cases}$

$\therefore x<\dfrac{1}{3}$ 且 $x\ge 10$，不合，$\therefore$無解



類題4

圖解不等式並寫出其解：

(1) $-3\le 6x-3<7$

(2) $0<\dfrac{2}{5}x-1<9$

(3) $6x\le 3x-1\le 5x+3$

解：

(1) $0\le 6x<10\Rightarrow 0\le x<\dfrac{5}{3}$

(2) $0<2x-5<45$

$\Rightarrow 5<2x<50\Rightarrow \dfrac{5}{2}<x<25$

(3) $\begin{cases}6x\le 3x-1\\ 3x-1\le 5x+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x\le -1\\ -2x\le 4\end{cases}$

$\therefore x\le -\dfrac{1}{3}$ 且 $x\ge -2$

$\therefore -2\le x\le -\dfrac{1}{3}$

例題5

滿足不等式 $\dfrac{5x+1}{2}-\dfrac{2x-1}{3}<1$ 的最大整數為何？

解：

$15x+3-4x+2<6$

$\Rightarrow 11x<1\Rightarrow x<\dfrac{1}{11}$

$\therefore$最大整數為0

類題5

滿足 $1<\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{2}\le 7$ 的整數共有多少個？

解：

$6<5x+3\le 42$

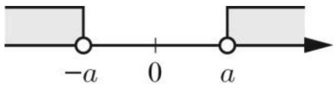
$\Rightarrow 3<5x\le 39\Rightarrow \dfrac{3}{5}<x\le\dfrac{39}{5}$

$x=1,2,3,4,5,6,7$ ，共7個整數

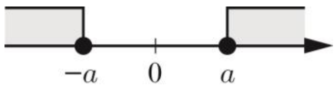
例題6	類題6
若 $y=-3x+5$，已知 $3\le x<6$，則 y 範圍為何？ 解： $-18<-3x\le -9$ $\therefore -13<-3x+5\le -4$ 即 $-13<y\le -4$	若 $y=\dfrac{3}{2}x+5$，已知 $-2<x<3$，則 y 範圍為何？ 解： $-3<\dfrac{3}{2}x<\dfrac{9}{2}$ $\therefore 2<\dfrac{3}{2}x+5<\dfrac{19}{2}$ 即 $2<y<\dfrac{19}{2}$
例題7	類題7
若 $a>0,b<0$，則點 $A(a-b,b-a)$ 在第幾象限？ 解： $\because a>0,b<0$，$a-b$ 為正減負 $\therefore a-b>0$ 又 $b-a$ 為負減正，$\therefore b-a<0$ 得 $A(a-b,b-a)$ 在第四象限	若 $a<0,b<0$，則點 $B(-3a,a+b)$ 在第幾象限？ 解： $\because a<0$ $\therefore -3a>0$ 又 $a+b<0$ 得 B 點在第四象限
例題8	類題8
若 $P(a-2,a+6)$ 在第二象限，則 a 的範圍為何？ 解： $a-2<0$ 且 $a+6>0$ $\therefore a<2$ 且 $a>-6$，則 $-6<a<2$ 	若 $Q(a-5,a-7)$ 在第一象限，則 a 的範圍為何？ 解： $a-5>0$ 且 $a-7>0$ $\therefore a>5$ 且 $a>7$，則 $a>7$ 

主題2　絕對值不等式

若 $a>b>0$，利用圖示，即可解絕對值不等式：

(1) $|x|>a$ 

$\Rightarrow x<-a$ 或 $x>a$

(2) $|x|\geq a$ 

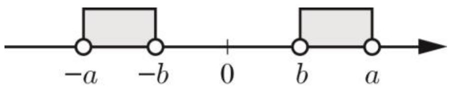
$\Rightarrow x\leq -a$ 或 $x\geq a$

(3) $|x|<a$ 

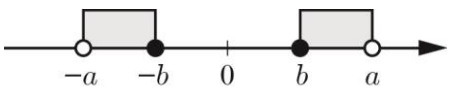
$\Rightarrow -a<x<a$

(4) $|x|\leq a$ 

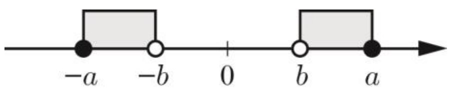
$\Rightarrow -a\leq x\leq a$

(5) $b<|x|<a$ 

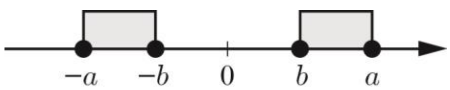
$\Rightarrow -a<x<-b$ 或 $b<x<a$

(6) $b\leq |x|<a$ 

$\Rightarrow -a<x\leq -b$ 或 $b\leq x<a$

(7) $b<|x|\leq a$ 

$\Rightarrow -a\leq x<-b$ 或 $b<x\leq a$

(8) $b\leq |x|\leq a$ 

$\Rightarrow -a\leq x\leq -b$ 或 $b\leq x\leq a$

上述結論，只要懂得利用「距離」的觀念，由原點出發，往右（正)、左（負）等距離標記端點，再看看題意的＞或＜，即可輕鬆得到結論囉！

例題9

解絕對值不等式：

(1)$|x|>-2$　(2)$|x|\ge 0$

(3)$|x|\le 0$　(4)$|3x+1|>0$

解：

$|x|\ge 0$恆成立，故

(1)$|x|\ge 0>-2$恆成立

$\therefore x$為任意實數

(2)x為任意實數

(3)$x=0$

(4)$3x+1\ne 0, x\ne -\dfrac{1}{3}$

類題9

解絕對值不等式：

(1)$|2x-1|>-5$　(2)$|x|>0$

(3)$|x|<0$　(4)$|5x+6|\ge 0$

解：

(1)x為任意實數

(2)$x\ne 0$

(3)絕對值不為負值，$\therefore x$無解

(4)x為任意實數

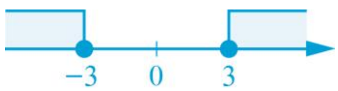
例題10

解絕對值不等式：

(1)$|x|\ge 3$　(2)$|2x+1|>3$

解：

(1)$x\le -3$或$x\ge 3$



(2)$2x+1<-3$或$2x+1>3$

$\therefore x<-2$或$x>1$

類題10

解絕對值不等式：

(1)$|x-1|>6$　(2)$|5x-1|\ge 9$

解：

(1)$x-1<-6$或$x-1>6$

$\therefore x<-5$或$x>7$

(2)$5x-1\le -9$或$5x-1\ge 9$

$\therefore x\le -\dfrac{8}{5}$或$x\ge 2$

例題11

求下列不等式的解：

(1)$|4x+3|<7$　(2)$|4-3x|\le 2$

解：

(1)$-7<4x+3<7 \Rightarrow -10<4x<4$

$\therefore -\dfrac{5}{2}<x<1$

(2)$-2\le 4-3x\le 2$

$-6\le -3x\le -2$

$\therefore 2\ge x\ge \dfrac{2}{3}$

類題11

求下列不等式的解：

(1)$|6x-5|<7$　(2)$|3-x|\le 8$

解：

(1)$-7<6x-5<7 \Rightarrow -2<6x<12$

$\therefore -\dfrac{1}{3}<x<2$

(2)$-8\le 3-x\le 8$

$-11\le -x\le 5$

$\therefore 11\ge x\ge -5$

<table>
<tr><td>例題12</td><td>類題12</td></tr>
<tr><td>
求不等式的解：
(1) $2<|3x-1|<8$　(2) $2\le|1-2x|<8$
解：
(1) $-8<3x-1<-2$ 或 $2<3x-1<8$
$\therefore -7<3x<-1$ 或 $3<3x<9$
$\therefore -\frac{7}{3}<x<-\frac{1}{3}$ 或 $1<x<3$
(2) $-8<1-2x\le-2$ 或 $2\le1-2x<8$
$\therefore -9<-2x\le-3$ 或 $1\le-2x<7$
$\therefore \frac{9}{2}>x\ge\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}\ge x>-\frac{7}{2}$
</td><td>
求不等式的解：
(1) $3\le|x+2|\le10$　(2) $3<|2-x|\le10$
解：
(1) $-10\le x+2\le-3$ 或 $3\le x+2\le10$
$\therefore -12\le x\le-5$ 或 $1\le x\le8$
(2) $-10\le2-x<-3$ 或 $3<2-x\le10$
$\therefore -12\le-x<-5$ 或 $1<-x\le8$
$\therefore 12\ge x>5$ 或 $-1>x\ge-8$
</td></tr>
</table>

第4單元　課後練習

1.不等式$\frac{7}{5}(x+3)-\frac{3}{2}(2x-5)\geq 9-x$之解為<u>$x\leq\frac{9}{2}$</u>。

解：$14(x+3)-15(2x-5)\geq 90-10x\Rightarrow -6x\geq -27\Rightarrow x\leq\frac{9}{2}$

2.不等式$-5\leq 11-4x<1$之解為<u>$\frac{5}{2}<x\leq 4$</u>。

解：$-16\leq -4x<-10\Rightarrow 4\geq x>\frac{5}{2}$

3.若$3x-12\geq ax+6$的解為$x\geq 9$，則a值為<u>1</u>。

解：$(3-a)x\geq 18$，又$x\geq 9$，$\therefore 3-a=2\Rightarrow a=1$

4.不等式$23-5x\leq 3x+7<5x-8$之解為<u>$x>\frac{15}{2}$</u>。

解：$\begin{cases}23-5x\leq 3x+7\\3x+7<5x-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-8x\leq -16\\-2x<-15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 2\\x>\frac{15}{2}\end{cases}\Rightarrow x>\frac{15}{2}$

5.$|-3x+6|>0$的解為<u>$x\neq 2$之任意實數</u>。

解：$|-3x+6|\geq 0$恆成立，故$-3x+6\neq 0, x\neq 2$

6.不等式$|-2x-9|>3$之解為<u>$x>-3$或$x<-6$</u>。

解：$-2x-9<-3$或$-2x-9>3\Rightarrow -2x<6$或$-2x>12\Rightarrow x>-3$或$x<-6$

7.滿足不等式$1\leq|x+5|<3$之整數解有<u>4</u>個。

解：$-3<x+5\leq -1$或$1\leq x+5<3\Rightarrow -8<x\leq -6$或$-4\leq x<-2$

$\therefore x$可能為$-7,-6,-4,-3$共4個

8.不等式$|5x-7|<3$的解為<u>$\frac{4}{5}<x<2$</u>。

解：$-3<5x-7<3\Rightarrow 4<5x<10\Rightarrow\frac{4}{5}<x<2$

9.令滿足不等式$3\leq|4x+7|\leq 7$之最大整數為M，最小整數為m，則$M+m=$<u>-3</u>。

解：$-7\leq 4x+7\leq -3$或$3\leq 4x+7\leq 7\Rightarrow -\frac{7}{2}\leq x\leq -\frac{5}{2}$或$-1\leq x\leq 0$

$\therefore x=-3,-1,0$，$\therefore M=0, m=-3$，故$M+m=-3$

10.若$P(x+5,x-1)$在第三象限，則$Q(x-3,3-x)$在第<u>二</u>象限。

解：$x+5<0$，且$x-1<0$，$\therefore x<-5$，則$x-3<0, 3-x>0$，$\therefore Q$在第二象限

第 5 單元　函數及其圖形

主題 1　函數的概念

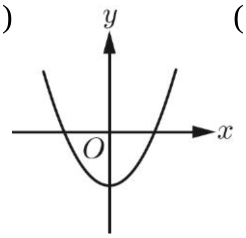
1.函數：若 x, y 為兩個變數，且對於任意一個 x 值，都恰有一個 y 值與之對應，則稱 y 是 x 的函數，記作 $y=f(x)$。此時，x 稱為自變數，y 稱為應變數。

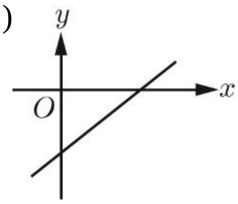
2.函數值：已知函數 $y=f(x)$，則 $x=a$ 時，所對應的函數值為 $f(a)$。

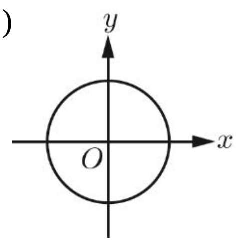
3.函數圖形：給定函數 $y=f(x)$，把每個 x 值與其所對應的 y 值，寫成數對 (x,y)，並在直角坐標平面上畫出其對應的點，將這些點連起來，即可得 $y=f(x)$ 的圖形。

例題1

試判斷下列圖形有哪些為 $y=f(x)$ 函數圖形？

(甲)


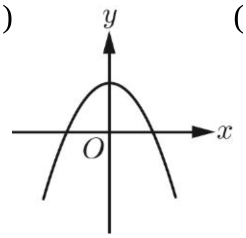
(乙)


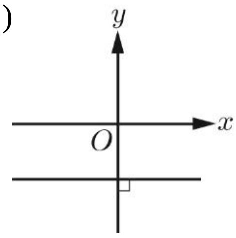
(丙)


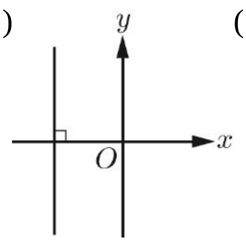
解：
函數定義中，規定任何一個 x 值所對應的 y 值都恰一個，不能有多個 y 值，故在圖形上，任意一條垂直 x 軸的直線，都只能與圖形有1個交點，不能有2個或以上的交點，$\therefore$(甲)(乙)為函數

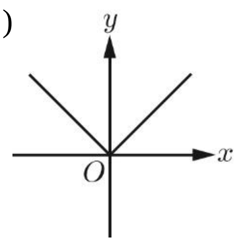
類題1

試判斷下列圖形有哪些為 $y=f(x)$ 函數圖形？

(甲)


(乙)


(丙)


(丁)


解：
(甲)(乙)(丁)為函數

例題2	類題2
若函數 $f(x)=4x^3-5x+1$，則 (1) $f(-1)=?$ (2)若 $(2,k)$ 為 $f(x)$ 圖形上一點，則 k 值為何？ 解： (1) $f(-1)=4(-1)^3-5(-1)+1=2$ (2) $f(2)=k=4\cdot 2^3-5\cdot 2+1$，$\therefore k=23$	若函數 $f(x)=3x^2+6x$，則 (1) $f(2)=?$ (2)若 $f(x)$ 圖形通過點 $(t,0)$，則 $t=?$ 解： (1) $f(2)=3\cdot 2^2+6\cdot 2=24$ (2) $f(t)=0=3t^2+6t$，$3t(t+2)=0$ $\therefore t=0$ 或 -2
例題3	類題3
若函數 $y=f(x)=ax^2+13$，且 $f(2)=9$，則 (1) $a=?$ (2)若 $f(k+1)=12$，則 k 值為何？ 解： (1) $f(2)=a\cdot 4+13=9$，$\therefore a=-1$ (2) $f(k+1)=(-1)\cdot(k+1)^2+13=12$ $\Rightarrow k(k+2)=0$ $\therefore k=0$ 或 -2	若函數 $y=f(x)=ax+7$，且 $f(2)=-11$，則 (1) a 值為何？ (2) $f(-1)=?$ (3)若 $f(k)=-20$，則 $k=?$ 解： (1) $f(2)=2a+7=-11$，$a=-9$ (2) $f(x)=-9x+7$，$f(-1)=16$ (3) $f(k)=-9k+7=-20$，$\therefore k=3$

主題 2　線型函數及其圖形

1.線型函數：

形如 $y=f(x)=ax+b$ 的函數，稱為線型函數，其圖形為一直線。其中

(1)若 $a\neq 0$，則 $y=f(x)=ax+b$ 稱為一次函數，其圖形為斜直線。

(2)若 $a=0$，則 $y=f(x)=b$ 稱為常數函數，其圖形為水平線。

2.線型函數的圖形：

線型函數的圖形為一直線，在直角坐標平面上，任取兩個對應點，並以直線連接這兩點，

通常我們會取直線與 x 軸、y 軸的交點。

例題4	類題4
(甲) $y=3$　(乙) $y=2x-1$ (丙) $y=\frac{5}{3}x-\frac{1}{6}$　(丁) $y=5x^2+2$ (戊) $y=\frac{1}{x}+3$ 則上述何者為一次函數？何者為常數函數？何者為線型函數？ 解： 一次函數：(乙)(丙) 常數函數：(甲) $\Rightarrow$(甲)(乙)(丙)合稱為線型函數	(甲) $y=\frac{2+x}{3}$　(乙) $y=-100$ (丙) $y=\sqrt{x}+3$　(丁) $y=101^2$ (戊) $y=-6x-100^2$ 則上述何者為一次函數？何者為常數函數？何者為線型函數？ 解： 一次函數：(甲)(戊) 常數函數：(乙)(丁) $\Rightarrow$(甲)(乙)(丁)(戊)合稱為線型函數
例題5	類題5
已知 $f(x)$ 為一次函數，且 $f(2)=3, f(3)=6$，則(1) $f(x)$ 為何？　(2) $f(-3)$ 之值為何？ 解： 設 $f(x)=ax+b$ $\therefore \begin{cases}2a+b=3\\3a+b=6\end{cases} \Rightarrow a=3, b=-3$ (1) $f(x)=3x-3$ (2) $f(-3)=-9-3=-12$	若一次函數 $f(x)=ax+b$ 的圖形通過點 $(3,5)$, $(4,2)$，則 a,b 值各為何？ 解： $f(3)=3a+b=5\cdots$① $f(4)=4a+b=2\cdots$② ②−①得 $a=-3$，代回①得 $b=14$

例題6	類題6
已知 $f(x)=(a-2)x^3+(b+1)x^2+cx+5$ 為一次函數，且 $f(2)=7$ ，則 $a+b+c=?$ 解： $\because f(x)$ 為一次函數 $\therefore a-2=0, b+1=0 \Rightarrow a=2, b=-1$ 又 $f(x)=cx+5, f(2)=2c+5=7$ $\therefore c=1$ $\therefore a+b+c=2+(-1)+1=2$	已知 $g(x)=(a-2)x^2+2x-1$ 為一線型函數，則 (1) $a=?$ (2) $g(3)=?$ 解： (1) $a-2=0$ ，$\therefore a=2$ (2) $g(x)=2x-1$ ，$\therefore g(3)=2\cdot 3-1=5$

例題7	類題7
已知一線型函數 $f(x)$ 過點 $(2,6)$, $(-3,6)$ ，則 $f(5)=?$ 解： 設 $f(x)=ax+b$ $f(2)=2a+b=6\cdots①$ $f(-3)=-3a+b=6\cdots②$ ①−②得 $a=0$ ，代回①得 $b=6$ $\therefore f(x)=6$ ，則 $f(5)=6$ 或由 $f(x)$ 圖形觀察得 $f(5)=6$	已知 $f(x)$ 為常數函數，且 $f(5)=100$ ，則 (1) $f(x)=?$ (2) $f(-3)=?$ 解： (1)常數函數 $f(x)=$ 常數 故 $f(x)=100$ (2) $f(-3)=100$

例題8

已知一次函數 $y=f(x)=6x+3$，則

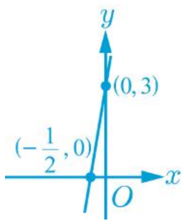
(1) $f(x)$ 與兩軸的交點坐標為何？

(2) $f(x)$ 圖形與兩軸所形成三角形面積為何？

解：

(1)

x	0	$-\frac{1}{2}$
y	3	0



$\therefore$與 x 軸交點 $(-\frac{1}{2},0)$

y 軸交點 $(0,3)$

(2) $\frac{1}{2}\times 3\times\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{4}$ 平方單位

類題8

已知一次函數 $y=f(x)=2x+b$ 的圖形與 x 軸交於 $(4,0)$，則

(1) $b=?$

(2) $f(x)$ 與兩軸所形成三角形面積為何？

解：

(1) $f(4)=8+b=0$，$b=-8$

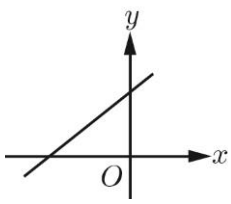
(2) $f(x)=2x-8$，則 $f(0)=-8$

故 $f(x)$ 圖形與 y 軸交點為 $(0,-8)$

$\therefore$面積 $=\frac{1}{2}\left|4\times(-8)\right|=16$

例題9

右圖為一次函數 $y=f(x)=ax+b$ 的圖形，則 a,b 的正負關係為何？



解：

看圖形與兩軸交點

x	0	$-\frac{b}{a}$
y	b	0

$\therefore$交點 $(0,b),(-\frac{b}{a},0)$

可知 $b>0,-\frac{b}{a}<0$

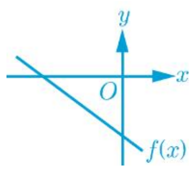
故 $a>0,b>0$

類題9

若線型函數 $y=f(x)=ax+b$，且 $a\neq 0,b\neq 0$，其圖形不通過第一象限，則 a,b 正負關係為何？

解：

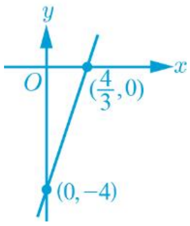
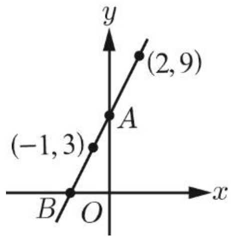
$\because a\neq 0,b\neq 0$，$\therefore$圖形如下



$\therefore$由圖形與兩軸交點 $(-\frac{b}{a},0),(0,b)$

可知 $-\frac{b}{a}<0,b<0$

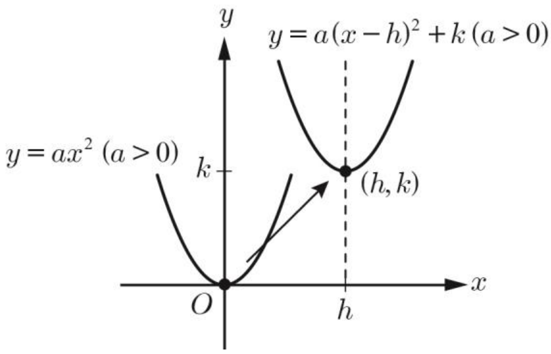
故 $a<0,b<0$

例題10	類題10
若 $f(x)$ 為一線型函數，且圖形通過 $(3,5),(0,-4)$，試求： (1) $f(x)$ 為何？ (2)若 $(2,k)$ 在此線型函數圖形上，則 $k=$? (3)此圖形不通過哪一象限？ 解： 設 $y=f(x)=ax+b$ $\because f(3)=3a+b=5, f(0)=0+b=-4$ $\therefore a=3,b=-4$ (1) $f(x)=3x-4$ (2) $f(2)=6-4=2$，$\therefore k=2$ (3) $\begin{array}{c\|c\|c} x & 0 & \frac{4}{3} \\ \hline y & -4 & 0 \end{array}$ $\therefore$不通過第二象限  	若 $y=f(x)$ 為一線型函數，且圖形如右，試求：  (1) $f(x)$ 為何？ (2) B 點坐標。 (3) $\triangle ABO$ 面積。 解： 設 $y=f(x)=ax+b$ $\because$通過 $(-1,3),(2,9)$ $\therefore f(-1)=-a+b=3, f(2)=2a+b=9$ $\therefore a=2,b=5$ (1) $f(x)=2x+5$ (2) $2x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$，$\therefore B(-\frac{5}{2},0)$ (3) $A(0,5), B(-\frac{5}{2},0), O(0,0)$ $\therefore$直角三角形面積 $=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 5$ $=\frac{25}{4}$ 平方單位

主題3　二次函數及其圖形

1.二次函數：形如 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ ，其中 $a\neq 0$ 的函數即為二次函數。

2.二次函數 $y=ax^2$ 圖形的平移 $(a\neq 0)$：



(1) $y=ax^2$ 圖形為一拋物線。

(i)若 $a>0$ ，圖形開口向上；

若 $a<0$，圖形開口向下。

(ii)拋物線的頂點 $(0,0)$，對稱軸方程式 $x=0$（即 y 軸）。

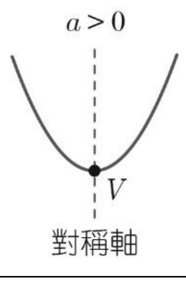
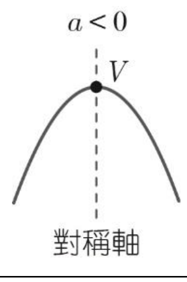
(2)若將 $y=ax^2$ 圖形向右平移 h 單位，向上平移 k 單位，則頂點由 $(0,0)$ 平移至 (h,k) ，對稱軸為 $x=h$ ，此時二次函數為 $y=a(x-h)^2+k$ 。

(3) $y=ax^2$ 與 $y=a(x-h)^2+k$ 圖形的開口、大小皆相同，且 $|a|$ 愈大時，開口愈小。

3.二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 與 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形 $(a\neq 0)$：

利用配方法 $f(x)=ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

即形如 $y=a(x-h)^2+k$ ，可知

類型	$a>0$	$a<0$
圖形		
頂點 V	$V(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$ ，即 (h,k)	$V(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$ ，即 (h,k)
極值	$x=-\dfrac{b}{2a}$ 時， y 有最小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$x=-\dfrac{b}{2a}$ 時， y 有最大值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$
對稱軸	$x=-\dfrac{b}{2a}$ ，即 $x=h$	$x=-\dfrac{b}{2a}$ ，即 $x=h$

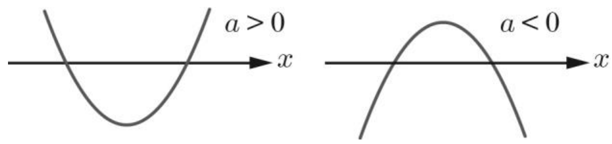
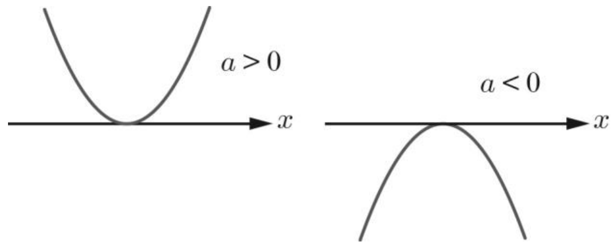
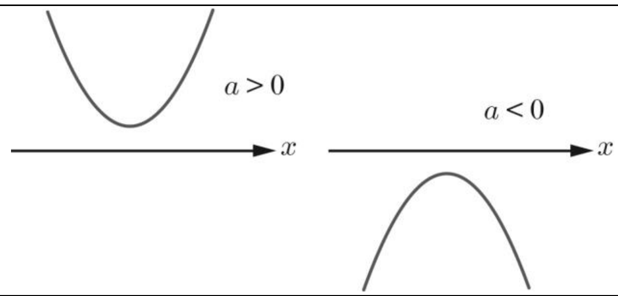
4.由圖形判別 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 之 a,b,c 及 b^2-4ac 的正負：

(1)由圖形開口方向，若開口向上，則 $a>0$ ，反之，開口向下，則 $a<0$ 。

(2)由頂點坐標之 $x=-\dfrac{b}{2a}$ ，若頂點在 x 軸正向，則 $-\dfrac{b}{2a}>0$，反之，在 x 軸負向，則 $-\dfrac{b}{2a}<0$ 。

(3)由拋物線與 y 軸交點 $(0,c)$ ，若在 y 軸正向，則 $c>0$ ，反之，在 y 軸負向，則 $c<0$ 。

(4) $y=ax^2+bx+c$ 與 x 軸 $(y=0)$ 相交時，即求 $ax^2+bx+c=0$ 之解 x ，故

(i)	$b^2-4ac>0$	有2相異實根，即與 x 軸有2相異交點，且交點為 $(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0)$	
(ii)	$b^2-4ac=0$	有2相同實根，即與 x 軸有1個交點，且交點為 $(-\frac{b}{2a},0)$	
(iii)	$b^2-4ac<0$	沒有實根，即與 x 軸沒有交點	

<table>
<tr><td>例題11</td><td>類題11</td></tr>
<tr><td>

已知二次函數 $y=-2x^2+8x-8$，試求此圖形之

(1)開口方向

(2)頂點坐標

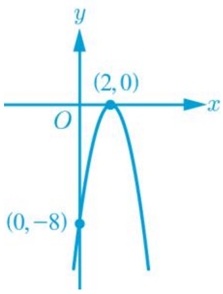
(3)最小值或最大值

(4)對稱軸方程式

(5)與 x 軸交點坐標

(6)與 y 軸交點坐標

解：



$y=-2(x-2)^2$

(1) $\because -2<0$

$\therefore$開口向下

(2)頂點坐標 $(2,0)$

(3)開口向下

$\therefore$有最大值 $y=0$

(4)對稱軸方程式 $x=2$

(5)當 $-2x^2+8x-8=0$

$\Rightarrow x^2-4x+4=0$

$\Rightarrow (x-2)^2=0$

$\therefore x=2$（重根）

故與 x 軸只有1交點 $(2,0)$

(6)當 $x=0$ 代入，$y=-8$

故與 y 軸交點 $(0,-8)$

</td><td>

已知二次函數 $y=3x^2-6x-45$，試求此圖形之

(1)開口方向

(2)頂點坐標

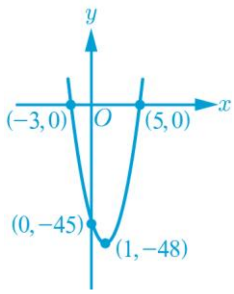
(3)最小值或最大值

(4)對稱軸方程式

(5)與 x 軸交點坐標

(6)與 y 軸交點坐標

解：



$y=3(x-1)^2-48$

(1) $\because 3>0$

$\therefore$開口向上

(2)頂點坐標

$(1,-48)$

(3)開口向上

$\therefore$有最小值 $y=-48$

(4)對稱軸方程式 $x=1$

(5)當 $3x^2-6x-45=0$

$\Rightarrow x^2-2x-15=0$

$\Rightarrow (x-5)(x+3)=0$

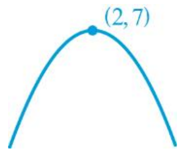
$\therefore x=5,-3$

故與 x 軸交點為 $(5,0),(-3,0)$

(6)當 $x=0$ 代入，$y=-45$

故與 y 軸交點 $(0,-45)$

</td></tr>
</table>

例題12	類題12
已知二次函數 $y=2x^2-2x+1$，試求： (1)最大值或最小值為何？ (2)當 $-1\le x\le 1$ 時，其最大值、最小值各為何？ (3)當 $4\le x\le 6$ 時，其最大值、最小值各為何？ 解： $y=2x^2-2x+1$ $=2(x^2-x)+1$ $=2(x-\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{2}$  故圖形開口向上， 頂點 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (1)有最小值 $y=\frac{1}{2}$ (2)當 $-1\le x\le 1$ 時，有包含頂點 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $\because f(-1)=5, f(1)=1$ $\therefore$ 最小值 $y=\frac{1}{2}$，最大值 $y=5$ (3)當 $4\le x\le 6$ 時，不包含頂點 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $\because f(4)=25, f(6)=61$ $\therefore$ 最小值 $y=25$，最大值 $y=61$	已知二次函數 $y=-x^2+4x+3$，試求： (1)最大值或最小值為何？ (2)當 $1\le x\le 4$ 時，其最大值、最小值各為何？ (3)當 $0\le x\le 1$ 時，其最大值、最小值各為何？ 解：  $y=-x^2+4x+3$ $=-(x^2-4x)+3$ $=-(x-2)^2+3+4$ 故圖形開口向下，頂點 $(2,7)$ (1)有最大值 $y=7$ (2)當 $1\le x\le 4$ 時，有包含頂點 $(2,7)$ $\because f(1)=6, f(4)=3$ $\therefore$ 最大值 $y=7$，最小值 $y=3$ (3)當 $0\le x\le 1$ 時，不包含頂點 $(2,7)$ $\because f(0)=3, f(1)=6$ $\therefore$ 最大值 $y=6$，最小值 $y=3$

例題13	類題13
若將 $y=2x^2+4x-5$ 圖形向右平移2單位、向下平移3單位，則新圖形所對應的二次函數為何？ 解： $y=2x^2+4x-5=2(x+1)^2-7$ $\therefore$ 頂點 $(-1,-7)$ 右移2單位、下移3單位 $\therefore$ 新頂點 $(1,-10)$ 故新二次函數為 $y=2(x-1)^2-10$	若將 $y=x^2+6x-3$ 右移 m 單位、上移 n 單位，可得 $y=x^2-12x+9$ ，則數對 $(m,n)=?$ Key觀察二函數頂點坐標可得 解： $y=x^2+6x-3=(x+3)^2-12$ 頂點 $(-3,-12)$ $y=x^2-12x+9=(x-6)^2-27$ 頂點 $(6,-27)$ $(-3,-12)$ 平移到 $(6,-27)$ 為右移9單位、下移15單位，$\therefore m=9,n=-15$ 故 $(m,n)=(9,-15)$
例題14	類題14
已知二次函數 $f(x)=7x^2+bx+c$ 在 $x=3$ 時，有最小值40，試求 b,c 各值。 解： $f(x)=7(x-3)^2+40$ $=7x^2-42x+103$ $\therefore b=-42,c=103$	已知二次函數 $y=-3x^2+bx+c$ 之頂點為 $(-2,5)$ ，則 $b+c=?$ 解： $y=-3(x+2)^2+5$ $=-3x^2-12x-12+5$ $\therefore b=-12,c=-7\Rightarrow b+c=-19$

<table>
<tr><td>例題15</td><td>類題15</td></tr>
<tr><td>
試求滿足下列條件之二次函數：

(1)已知頂點 $(0,-1)$ ，且過 $(5,3)$

(2)圖形通過 $(-1,3),(5,3)$ 及 $(-2,10)$

解：

(1) $y=a(x-0)^2-1$，將 $(5,3)$ 代入

$3=a\cdot 25-1\Rightarrow a=\dfrac{4}{25}$

$\therefore y=\dfrac{4}{25}x^2-1$

(2) $\because (-1,3),(5,3)$ 兩點對稱於

$x=\dfrac{-1+5}{2}=2$

$\therefore$設 $y=a(x-2)^2+k$

代入 $(-1,3),(-2,10)$

$\therefore \begin{cases}3=9a+k\\10=16a+k\end{cases}\Rightarrow a=1,k=-6$

$\therefore y=(x-2)^2-6$
</td><td>
試求滿足下列條件之二次函數：

(1)已知最高點 $(-3,2)$ ，且過 $(-1,-6)$

(2)圖形對稱於 $x+3=0$ ，且過 $(-1,7),(0,22)$

解：

(1) $y=a(x+3)^2+2$ ，將 $(-1,-6)$ 代入

$-6=a\cdot 4+2\Rightarrow a=-2$

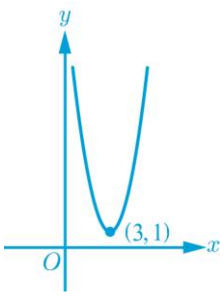
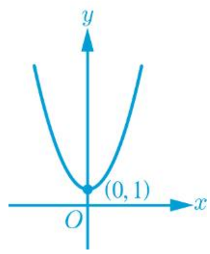
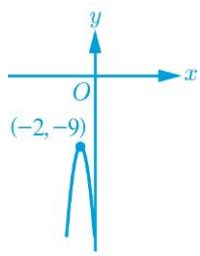
$\therefore y=-2(x+3)^2+2$

(2)設 $y=a(x+3)^2+k$

代入 $(-1,7),(0,22)$

$\therefore \begin{cases}7=4a+k\\22=9a+k\end{cases}\Rightarrow a=3,k=-5$

$\therefore y=3(x+3)^2-5$
</td></tr>
</table>

例題16	類題16
試判斷下列二次函數與 x 軸交點個數： (1) $y=3x^2+5x-1$　(2) $y=x^2-x+6$ (3) $y=5x^2$　(4) $y=2(x-3)^2+1$ $\boxed{\text{Key}}$①若二次函數未配方，可用 b^2-4ac ②若二次函數已配方，可看頂點位置與開口 解： (1) $y=3x^2+5x-1$ $b^2-4ac=25-4\cdot3\cdot(-1)>0$ ∴有2交點 (2) $y=x^2-x+6$ $b^2-4ac=1-24<0$ ∴0個交點 (3) $y=5x^2$，頂點 $(0,0)$，開口向上 ∴與 x 軸1個交點 (4) $y=2(x-3)^2+1$ 頂點 $(3,1)$ 開口向上 ∴與 x 軸0個交點  	試判斷下列二次函數與 x 軸交點個數： (1) $y=-2x^2+x-6$　(2) $y=x^2+10x-5$ (3) $y=\frac{2}{3}x^2+1$　(4) $y=-6(x+2)^2-9$ 解： (1) $y=-2x^2+x-6$ $b^2-4ac=1-4(-2)(-6)<0$ ∴0個交點 (2) $y=x^2+10x-5$ $b^2-4ac=100-4\cdot(-5)>0$ ∴2個交點 (3) $y=\frac{2}{3}x^2+1$ 頂點 $(0,1)$ 開口向上 ∴與 x 軸0個交點  (4) $y=-6(x+2)^2-9$ 頂點 $(-2,-9)$ 開口向下 ∴與 x 軸0個交點 

例題17

已知二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如右，則

(1) a ____ 0

(2) b ____ 0

(3) c ____ 0

(4) b^2-4ac ____ 0（請填入 $>,<$ 或 $=$）

解：

(1)開口向上，$\therefore a>0$

(2)頂點之 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 在 x 軸正向

$\therefore -\dfrac{b}{2a}>0$，又 $a>0$，$\therefore b<0$

(3) $x=0$ 代入，與 y 軸交點 $(0,c)$

$\therefore c<0$

(4)與 x 軸有2個交點

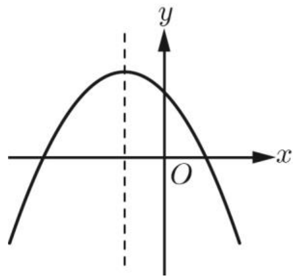
$\therefore b^2-4ac>0$

類題17

已知二次函數

$y=ax^2+bx+c$ 的圖形

如右，則



(1) a ____ 0

(2) b ____ 0

(3) c ____ 0

(4) b^2-4ac ____ 0（請填入 $>,<$ 或 $=$）

解：

(1)開口向下，$\therefore a<0$

(2)頂點之 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 在 x 軸負向

$\therefore -\dfrac{b}{2a}<0$，又 $a<0$，$\therefore b<0$

(3) $x=0$ 代入，與 y 軸交點 $(0,c)$

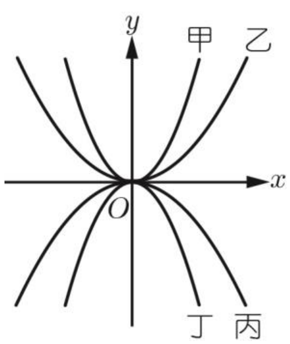
$\therefore c>0$

(4)與 x 軸有2個交點

$\therefore b^2-4ac>0$

例題18

已知 $y=6x^2, y=2x^2, y=-6x^2, y=-2x^2$ 四個二次函數欲標記在右圖之甲、乙、丙、丁上，請問甲、乙、丙、丁所代表的函數各為何？



解：

$y=ax^2$ 之 $|a|$ 愈大，則開口愈小

又 $a>0$ 開口向上，$a<0$ 開口向下

$\therefore$ 甲：$y=6x^2$，乙：$y=2x^2$

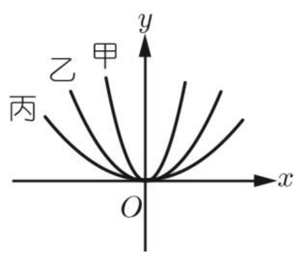
丙：$y=-2x^2$，丁：$y=-6x^2$

類題18

若甲：$y=ax^2$、

乙：$y=bx^2$、

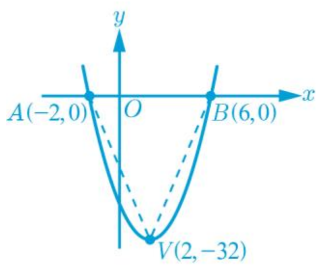
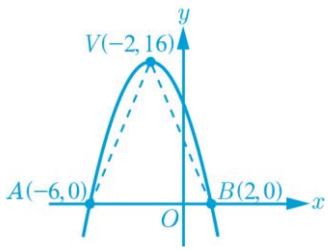
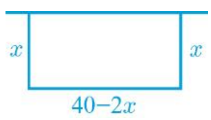
丙：$y=cx^2$ 的圖形如右，則 a,b,c 之大小為何？



解：

開口愈小，則 x^2 係數愈大

$\therefore a>b>c$

例題19	類題19
設 $y=2x^2-8x-24$ 之頂點為 V，並與 x 軸交於 A,B 兩點，則 $\triangle ABV$ 面積為何？ 解： $y=2x^2-8x-24=2(x-2)^2-32$ $\therefore$ 頂點 $V(2,-32)$ 又 $2x^2-8x-24=0 \Rightarrow x^2-4x-12=0$ $\Rightarrow (x-6)(x+2)=0$，$\therefore x=6,-2$ $\therefore \triangle ABV=\frac{1}{2}\times 8\times 32=128$ 平方單位 	設 $y=-x^2-4x+12$ 之頂點為 V，並與 x 軸交於 A,B 兩點，則 $\triangle ABV$ 面積為何？ 解： $y=-x^2-4x+12=-(x+2)^2+16$ $\therefore$ 頂點 $V(-2,16)$ 又 $-x^2-4x+12=0 \Rightarrow x^2+4x-12=0$ $\Rightarrow (x+6)(x-2)=0$，$\therefore x=-6,2$ $\therefore \triangle ABV=\frac{1}{2}\times 8\times 16=64$ 平方單位 
例題20	類題20
菜農用40公尺長的籬笆沿著牆邊圍成一長方形的菜園，若把牆壁當成長方形的一邊不用籬笆，則菜園的最大面積為何？ 解： 設長方形垂直牆壁一邊的長為 x 公尺  則平行牆壁一邊為 $(40-2x)$ 公尺（如圖） $\therefore$ 面積 $=x(40-2x)=-2x^2+40x$ $=-2(x-10)^2+200$ $\therefore$ 當 $x=10$ 時，面積最大值為200平方公尺	若一長方形周長40公尺，則面積最大為何？ 解： 設長方形長 x 公尺 則寬為 $20-x$ 公尺 $\therefore$ 面積 $=x(20-x)$ $=-x^2+20x$ $=-(x-10)^2+100$ $\therefore$ 面積最大值為100平方公尺 即為正方形時面積最大

第 5 單元　課後練習

1.已知函數 $f(x)=ax+b$ 通過 $(2,-3)$，且圖形垂直 y 軸，則 $f(1)+f(2)+...+f(5)=$ __-15__。

解：$f(x)$ 為一常數函數（水平線），故 $f(x)=-3$，$\therefore f(1)+f(2)+...+f(5)=5\times(-3)=-15$

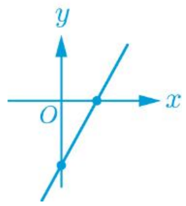
2.若 $a>0,b<0$，則函數 $g(x)=ax+b$ 的圖形不通過第__二__象限。

解：

x	$-\frac{b}{a}$	0
y	0	b

與 x 軸交於 $(-\frac{b}{a},0)$，y 軸交於 $(0,b)$

$\because a>0,b<0$，$\therefore -\frac{b}{a}>0$，則圖形為



$\therefore$不通過第二象限

3.已知兩函數 $y=f(x)=6x+a$ 與 $y=g(x)=ax+k$ 相交於 $(2,6)$，則 $a+k=$__12__。

解：$(2,6)$ 代入 $f(x)$，$6=6\times2+a$，$a=-6$ 代回 $g(x)\Rightarrow -6\times2+k=6$

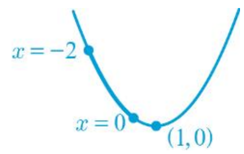
$\therefore k=18$，則 $a+k=-6+18=12$

4.二次函數 $y=-3x^2+12x-6$ 的頂點坐標為__$(2,6)$__。

解：$y=-3(x^2-4x)-6=-3(x-2)^2+6$，$\therefore$頂點 $(2,6)$

5.已知二次函數 $y=3x^2-6x+3$ 在 $-2\le x\le 0$ 時之最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$__30__。

解：$y=3(x-1)^2$，$\therefore$頂點 $(1,0)$，開口向上



$\because -2\le x\le 0$ 不包含頂點

$\therefore f(-2)=27, f(0)=3$，$\therefore M=27,m=3$，則 $M+m=30$

6.已知 $f(x)$ 為二次函數，且對稱軸為 $x+2=0$，又過點 $(-1,3),(0,12)$，則

二次函數 $f(x)=$__$3(x+2)^2$__。

解：設 $f(x)=a(x+2)^2+k$，將 $(-1,3),(0,12)$ 代入

得 $3=a+k,12=4a+k\Rightarrow a=3,k=0$，$\therefore f(x)=3(x+2)^2$

7.若二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的頂點在 $(-2,-3)$，且過 $(0,-11)$，則 $a+b+c=$__-21__。

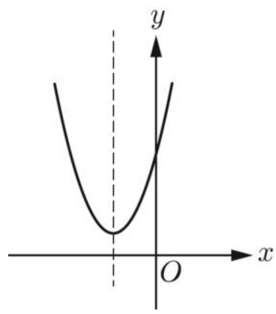
解：∵頂點 $(-2,-3)$，∴ $f(x)=a(x+2)^2-3$，將 $(0,-11)$ 代入，∴ $-11=4a-3 \Rightarrow a=-2$

∴ $f(x)=-2(x+2)^2-3=-2x^2-8x-11$，故 $a+b+c=-2-8-11=-21$

8.將二次函數 $y=2(x+3)^2-19$ 的圖形向右平移4單位，向上平移9單位，則新圖形對應的二次函數為__$y=2(x-1)^2-10$__。

解：$y=2(x+3)^2-19$ 之頂點 $(-3,-19)$，新頂點 $(1,-10)$，∴ $y=2(x-1)^2-10$

9.若 $y=ax^2+bx+c$ 之圖形如下，則下列有__4__個項目的值為正？



(甲) a　(乙) b　(丙) c　(丁) b^2-4ac　(戊) $f(1)$

解：(甲)開口向上，∴ $a>0$

(乙)頂點坐標之 x 為 $-\dfrac{b}{2a}$，且 $-\dfrac{b}{2a}<0$，∴ $b>0$

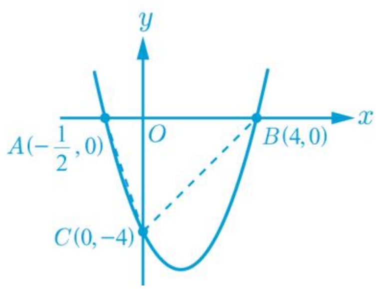
(丙)圖形與 y 軸交於 $(0,c)$，∴ $c>0$

(丁)圖形與 x 軸沒有交點，∴ $b^2-4ac<0$

(戊) $f(1)$ 表示 $x=1$ 代入 $y=ax^2+bx+c$，可知點位置在 x 軸上方，故 $f(1)>0$

10.已知二次函數 $f(x)=2x^2-7x-4$ 與 x 軸交於 A,B 兩點，並與 y 軸交於 C 點，則 $\triangle ABC$ 面積為__9__。

解：與 x 軸交點即 $y=0$



∴ $2x^2-7x-4=0 \Rightarrow (2x+1)(x-4)=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ 或4

∴ A,B 兩點分別為 $(-\dfrac{1}{2},0),(4,0)$

又與 y 軸交點即 $x=0$

∴ $x=0$ 代入得 $y=-4$，∴ C 點 $(0,-4)$

∴ $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\left|-\dfrac{1}{2}-4\right|\times|-4|=9$