中國π的一頁滄桑

◎洪萬生／台灣師大數學系

一、實用的中國 π

古代中國的數學研究概以實用為依歸，在圓周率 π 的逼近估計工作上，當然也不例外。比方說，在朝廷上，曆法家利用圓周率來推算曆書，而地方上的小官吏，也必須懂得如何去計算（圓形）穀倉的容積。隨著倉儲數量的增加，容器的度量被迫必須做得更精確，而 π 的精密估計也就變成一種很緊要很實用的事務了。再者，π 值估計得不夠理想，對小地方吏治的影響到底不大，了不起某某倒霉官吏掉一頂烏紗帽或者陪上一個腦袋瓜子罷了。但是，在一個農業社會中，何時降雨，雨量多少等等，在在都是皇帝庶民一體關心的大事，所以，中國歷代朝廷之重視曆法之改訂，是可以想見的。在這種情形下，π 值的估計如果害了曆書無法預知四季雨露，則風不調雨不順事小，碰上饑民造反，搖撼了江山基業可就不是鬧著玩的了。傳說，劉邦認為秦朝的覆亡與秦曆有關，因而他上台後，就立刻找來當代的曆法大家張蒼重訂曆法。六朝朝代，何承天（生於西元三七〇年，死於西元四四七年）就是一個宮廷天文師（太子更率令），著有《元嘉曆》一書。在討論渾天象體時，他說:「周天（即天體的一周長）三百六十五度三百四分之七十五。天常西轉，一日一夜，過周一度。南北兩極，相距一百一十六度三百四分之六十五分強，就是天徑（天體的直徑）。」由此可知：他所估計的 π 值為

$$\pi=\frac{圓周率}{直徑}=\frac{365\frac{75}{304}}{116\frac{65}{304}}=\frac{111035}{35329}\doteq 3.1428$$

二、中國 π 的歷史

中國最早有 π 近似值的書籍是《周髀算經》與《九章算經》，所謂的「徑一周三」就是出自《周髀算經》，當時所取的值是 3。直到西元一至五年，劉歆替王莽製作嘉量斛標準量器時，發覺有估計得更精密的必要，才算出 3.154 之值，後世稱為「歆率」。張衡，後漢南陽人（約西元一三〇年），是中國古代最偉大的天文學家，設計渾天儀和地動儀，算定圓周率為 $\frac{92}{29}$ 或 $\sqrt{10}$。西元三〇〇年左右，魏朝的劉徽從圓內接正六邊形著手，推至九十六邊形（當時稱做「割圓術」），算出近似值 3.14，後人稱為「徽率」。劉徽後來受到同行的刺激，繼

續割圓下去，居然割成一個圓內接正三千零七十二邊形，求得更精密的值 3.14159。無獨有偶地，一千年之後，又出現了一位「瘋子」—趙友欽，把邊數增加到一萬六千三百八十四邊，驗證了祖沖之的密率 $\frac{355}{113}$ 是一項很傑出的估計。

三、傑出的 355/113

祖沖之，南齊范陽人，生於西元四二九年，死於西元五〇〇年，是當代的特出數學家、天文學家與工程師。相傳他用「割圓術」求得圓周率 π 的正確數值，介於 3.1415927 和 3.1415926 之間，並且定 $\frac{22}{7}$ 為「疏率」，$\frac{355}{113}$ 為「密率」（近似於 3.1415929203），這個「密率」當世無人能出其右，直到一千一百多年後，才由德國人鄂圖(V. Otto)算出一個相同的數值來。祖沖之的計算法，應該會記載在他的《綴術》之中的，可惜，這部書失傳了。使得這個準確到小數點第六位的「密率」，平添了不少的神秘色彩。這是不足為奇的，因為密率與連分數（繁分數）的最佳近似理論有關，所以，後世的數學史家莫不異口同讚為一項非凡的成就。

四、連分數的計算

取 π 值的近似值 α=3.14159265，這個數值準確到小數點第八位數。規定 $[\alpha]$ 表 α 整數部份，即 $[\alpha]$=3。設 p=314159265，q=100000000，則 $\alpha=\frac{p}{q}$ 是一個有理數。

令 $\alpha_0=[\alpha]=[\frac{p}{q}]=3$，而

$$\frac{p}{q}=[\frac{p}{q}]+\frac{1}{\alpha_1}, 0\le\frac{1}{\alpha_1}<1$$

即

$$p=[\frac{p}{q}]q+\frac{p}{\alpha_1}(=r_1), 0\le r_1<q \qquad (1),$$

$r_1=14159265$, $\alpha_1=\frac{q}{r_1}=\frac{100000000}{14159265}$。令 $\alpha_1=[\alpha_1]=[\frac{q}{r_1}]=7$，同理可知

$$\frac{q}{r_1}=[\frac{q}{r_1}]+\frac{1}{\alpha_2}, 0\le\frac{1}{\alpha_2}<1,$$

即

$$q=[\frac{q}{r_1}]r_1+\frac{r_1}{\alpha_2}(=r_2), 0\le r_2<r_1 \qquad (2),$$

$r_2 = 885145$, $\alpha_2 = \frac{r_1}{r_2} = \frac{14159265}{885145}$。令 $\alpha_2 = [\alpha_2] = [\frac{r_1}{r_2}] = 15$，同理可知

$$\frac{r_1}{r_2} = [\frac{r_1}{r_2}] + \frac{1}{\alpha_3}, 0 \le \frac{1}{\alpha_3} < 1,$$

即

$$r_1 = [\frac{r_1}{r_2}]r_2 + \frac{r_2}{\alpha_3}(= r_3), 0 \le r_3 < r_2 \qquad (3),$$

$r_3 = 872090$, $\alpha = \frac{r_2}{r_3} = \frac{872090}{885145}$。令 $a_3 = [\alpha_3] = [\frac{r_2}{r_3}] = 1$，同理可知

$$\frac{r_2}{r_3} = [\frac{r_2}{r_3}] + \frac{1}{\alpha_4}, 0 \le \frac{1}{\alpha_4} < 1,$$

即

$$r_2 = [\frac{r_2}{r_3}]r_3 + \frac{r_3}{\alpha_4}(= r_4), 0 \le r_4 < r_3 \qquad (4),$$

$r_4 = 13055$, $\alpha_4 = \frac{13055}{872090}$ 等等。由於

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{\alpha_1}\left(\alpha = \frac{p}{q}, \alpha_1 = \frac{q}{r_1}\right) = [\alpha] + \cfrac{1}{[\alpha_1] + \cfrac{1}{\alpha_2}}\left(\alpha_2 = \frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$= [\alpha] + \cfrac{1}{[\alpha_1] + \cfrac{1}{[\alpha_2] + \cfrac{1}{\alpha_3}}} = [\alpha] + \cfrac{1}{[\alpha_1] + \cfrac{1}{[\alpha_2] + \cfrac{1}{[\alpha_3] + \cfrac{1}{\alpha_4}}}}$$

所以

$$3.14159265 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{13055}{872090}}}}$$

馬上可以曉得 3.14159265 的漸近連分數依次是：$\frac{3}{1}$（徑一周三），$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$（疏率），

$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106}$，$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113}$（密率），最後這一個近似值 $\frac{355}{113}$ 是略去 $\frac{13055}{872090}$ 所得到的，恰好是祖沖之的密率。更令人驚異的是：根據漸近分數的理論，分母不超過 113 的任何分數，沒有一個能比 $\frac{355}{113}$ 更接近於 π 值。這一項漂亮的「巧合」，不知道風靡了多少近代的數學史

家，為它獻身，為它搔白了頭！

五、π 與大衍求一術

注意到，在上述的連分數計算程序(1)(2)(3)(4)中，實際上就是歐幾里得輾轉相除法的翻版（在把一個有理數表為一個有限小數或無限循環小數的程序中，輾轉相除法也是一項不可或缺的工具）。這種輾轉計算法，降生於希臘，似乎專以解決兩整數的最大公因數為主；而投胎於中土，則自立門戶，巍巍乎名之曰「大衍求一術」，始終與不定方程式之解析共進退。求一術最早見之於三國時代的《孫子算經》下卷，用以解決韓信點兵問題：「物不知其數，三三數之餘二，五五數之餘三，七七數之餘二」，是抽象代數書上「中國餘數定理 (Chinese Remainder Theorem)」之濫觴（參見莫宗堅先生的〈韓信點兵〉一文，科學月刊創刊號）。接著，中國各朝代曆法改訂，都以大衍求一術求出更精確的近似值，來校正日差。詳見蔡仁堅先生的〈中國的天才數學家——秦九韶〉一文（收入《古代中國的科學家》一書，景象出版社印行）。也就是到了秦九韶的手上，大衍求一術才確定了它的通則與形式。在九韶先生的《數書九章》中有下列的記載：置奇右上，定居右下，立天元一於左上。先以右下除右上，所得商數與左上一相生，入左下，然後以右行上下，以少除多，遞互除之，所得商數，隨即遞互異乘，歸左行上下，須使右行上末得奇一而止。乃驗左上所得，以為乘率，或奇數已，見單一者便為乘率。

試舉一例，依大衍求一術解之：以何數乘 65，除以 83 餘 1？

解：可設何數為 x，則原題可化為不定方程式 $65x+83y=1$ 的求整數解之問題。因為 65 與 83 互質，故可用輾轉相除法的橫式遞互代入，求得其解，這是高一數學小問題。

大衍求一術的解法則如下：

(上)天元 $\alpha_0=1$	奇數 65
(下) 0	定母 83
(左)	(右) $q_1\cdots$65 除 83 之商

$\alpha_0=1$	65
$\alpha_1=q_1\alpha_0=1$	$r_1=18\cdots$65 除 83 之餘數

$q_2=3\cdots$18 除 65 之商

$\alpha_2=q_2\alpha_1+\alpha_0=4$	$r_2=11\cdots$18 除 65 之餘數
α_1	r_1=18

$q_3=1\cdots$11 除 18 之商

$\alpha_2 = 4$	r_2=11
$\alpha_3 = q_3\alpha_2 + \alpha_1 = 5$	$r_3 = 7 \cdots 11$ 除 18 之餘數

$q_4 = 1 \cdots 7$ 除 11 之商

$\alpha_4 = q_4\alpha_3 + \alpha_2 = 9$	$r_4 = 4 \cdots 7$ 除 11 之餘數
$\alpha_3 = 5$	r_3=7

$q_5 = 1 \cdots 4$ 除 7 之商

$\alpha_4 = 9$	r_4=4
$\alpha_5 = q_5\alpha_4 + \alpha_3 = 14$	$r_5 = 3 \cdots 4$ 除 7 之餘數

$q_6 = 1 \cdots 3$ 除 4 之商

$\alpha_6 = q_6\alpha_5 + \alpha_4 = 23$	$r_6 = 1 \cdots 3$ 除 4 之餘數
$\alpha_5 = 14$	r_5=3

讀者仔細觀察，當可發現輾轉相除法與大衍求一術實有貌異神同之處；利用大衍求一術，不但可以同時得知 65 與 83 互質；而且可以同時求出原方程式的一組解 $x = 23, y = -18$ 來（$\alpha_6 = 23$就是所謂的「乘率」）。（見本節末編者按語）

鑑於祖沖之的傑出，我們應該可以相信，他必然深諳「大衍求一術」之道；或許他在畫了一個圓內接正一萬六千多邊形之後，忽然靈光顯現，應用大衍求一術找到了這個 $\frac{355}{113}$ 也說不定。果真如此，則我們對中國古代數學的成就，當可再進一步地評價了。

（科月）編者按：由上面的解釋，我們有 $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = q_1$，而 $\alpha_n = q_n x_{n-1} + \alpha_{n-2}, n \geq 2$。同理，若令 $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1, \beta_n = q_n\beta_{n-1} + \beta_{n-2}, n \geq 2$。則證者不難發現 $r_n = (-1)^n(-83\beta_n + 65\alpha_n), n \geq 1$。由遞推公式知 $\beta_6 = 18, \alpha_n = 23$。即 $x = 23, y = -18$ 爲原方程式的一組解。

六、中國 π 的衰微

《綴術》在唐朝，不但是國子學中的選修科目，而且還是國家考試（大約相當於今日的高普考）科目之一。在當時的所有數學科目中，以此書最爲深奧，故規定學習的時間也最長(計四年)。唐代之重視數學教育，由此可見一斑。到了宋朝，更由於印刷術的發明，一般老百姓和士人有幸接觸數學書籍，數學知識逐漸平民化了，再加上金元異族雄踞北方虎視眈眈，士人與平民有感於國家與社會的生存環境，遂合力把數學研究從曆法計算、計算賦役等等這些官府用途上解放出來，推向更開闊更深遠的實用天地中．因而創造了中國古代數學的輝煌時代。《綴術》是何時失傳的，筆者無從得知，不過，即使不失傳，到了明代，恐怕也不會有人聞問了。明朝以八股文取士，把唐宋以來那一股生機勃發的數學研究浪潮，活生生地扼殺了。祖沖之的 π 值，自趙友欽（元人，著有《革象新書》）之後，便被人遺忘了，到了清代

才再被發現。那個時候，洋人的 π 值逼近已經後來居上，西學東漸也把西方的科技成就傳入中土。中國人對祖沖之的成就所採取的態度，我們不得而知，不過，令人遺憾的是，$\sqrt{10}$ 這個極其粗陋的近似值卻「統治」了中國數學界好長一段時間（參見李約瑟的《中國之科學與文明(四)》）。

在西方，π 的神秘性一直與幾何三大作圖難題之一的「化圓爲方」連在一起。化圓爲方的嚐試歷程中，可劃歸爲三個階段。第一期，從最早的埃及人時代到十七世紀中葉，其特徵就是使用「割圓術」，在這一段時期中，中國人所做的近似值成就，長時間地領先了西方人。第二期約從一六五〇年到一七五〇年，顯然受到剛發明的微積分之影響，用解析方法來將 π 表現成連分數、收斂級數及無窮乘積等等，π 的小數位也因而愈算愈多。這是中西實力消長的一個重要關鍵。接著下來，中國人所面臨的便是一部不忍卒讀的近代史。第三個時期堂堂邁入近代數學的大門，勒俊得 (Legendre) 於一七九四年證得 π 是一個無理數，再經過多人的努力，德國數學家林得曼 (Lindemann) 終於在一八八二年證明 π 是一個超越數（即非整係數多項式的零位也），才解決了將圓方化的問題：使用規與矩，在有限次作圖下，是無法做出一個正方形，使其面積等於一個預先給定圓的面積。這個圓方化的問題也可以轉化成求圓周長的問題。因此，人類在 π 的本質探討工作上，總算功德圓滿了（參見《π 的歷史、性質及計算》一書，賴建業編譯，中央書局出版）。

七、結語

四節內所敘述的「大衍求一術」之註釋及其例題，均取自《數學發達史》一書（張鵬飛與徐天游編著，台灣中華書局五十八年五月台二版）。該書簡短地敘說古中國數學的光輝成就，在認知上，既不感傷自憐，也不顢頇自大，正是整理國故國學的正確態度。筆者以謙抑的心情寫下這篇文章，無非是爲了欽仰前賢的這種泱泱大度罷了。倒無意鼓吹我們的學子，棄「輾轉相除法」而就「大衍求一術」，在已用慣了國際化的西方符號系統之後，再回來復古，恐怕只有徒增困擾了吧！