向量外積與四元數

◎李白飛／台灣大學數學系

1. 向量的外積

有「內積」就應該有「外積」，聽起來似乎理所當然，其實並不盡然，只有三維空間中，才有外積的定義。再說「內」、「外」之分，似乎是歷史的錯誤；兩個向量的內積，並不是個向量，而是個純量（數），然而兩個三維向量的外積，卻仍是個向量，絲毫不見「外」。

在三維空間中，兩個向量的外積，可以自然地描述，也可以藉由坐標來定義。設$\vec{a},\vec{b}$爲空間中兩個不平行的非零向量，其外積$\vec{a}\times\vec{b}$爲一長度等於$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，（$\theta$爲$\vec{a},\vec{b}$兩者交角，且$0<\theta<\pi$），而與$\vec{a},\vec{b}$皆垂直的向量。通常我們採取「右手定則」，也就是右手四指由$\vec{a}$的方向轉爲$\vec{b}$的方向時，大拇指所指的方向規定爲$\vec{a}\times\vec{b}$的方向。例如在右手系的空間坐標中，若$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$分別代表x軸、y軸、z軸正向的單位向量，則

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

另外，顯而易見的是，$\vec{a},\vec{b}$的外積與其次序有關，$\vec{b}\times\vec{a}$並不等於$\vec{a}\times\vec{b}$；事實上，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$。當$\vec{a},\vec{b}$中有一個零，或者兩者平行時，則令$\vec{a}\times\vec{b}=0$。

如果選定一組坐標系，$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$爲對應的三正交單位向量，則$\vec{a}$與$\vec{b}$的外積，可藉由其分量表示出來：若$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$，則

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\vec{i}+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\vec{j}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\vec{k}$$

假使我們借用行列式的符號，不妨把它寫成

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \qquad (*)$$

不但容易記，而且也可以經由行列式的性質，驗證一些外積的性質。

這兩個方法，各有千秋，前者易懂，後者好算。借助於坐標化，我們可以透過機械的運算(可能繁但不會難)，驗證一些類似

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}=0$$

的複雜式子。即使只知道定義，你一樣可以驗證，然而自然的描述法，就很難辦到。不過，引進坐標系來定義，終不免有個疑慮，那就是：選擇不同的坐標系，會不會導致不一樣的外積？

由行列式的性質可知，若將 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 分別代以 a_1, a_2, a_3 或 b_1, b_2, b_3，則(∗)之行列式等於 0，也就是說 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=0$。換句話說，$\vec{a}\times\vec{b}$ 與 $\vec{a},\vec{b}$ 兩向量都正交。另外

$$
\begin{aligned}
&|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\\
&=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\
&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\
&=|\vec{a}\times\vec{b}|^2
\end{aligned}
$$

而我們知道，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，因此，$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，總而言之，$\vec{a}\times\vec{b}$ 爲一長爲 $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，而與 $\vec{a},\vec{b}$ 皆正交的向量，可見與坐標系的選取無關。

外積的運算，與一般的乘積，有同有不同。相同的是，分配律成立：

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c},\quad (\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$$

不同的是，交換律與結合律並不成立。（試舉一例，說明 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ 不必等於 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$！）取而代之的是，反交換律 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ 及 Jacobi 恆等式

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=0$$

另外，純量與向量的混合結合律則無問題：

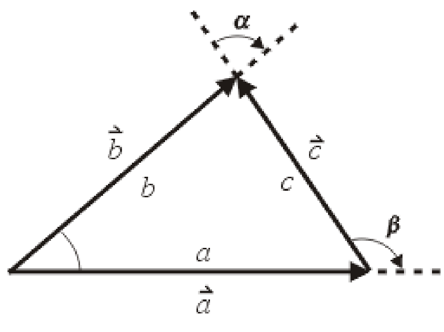
$$\alpha(\vec{a}\times c)=(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})$$

現在，我們來看一些簡單的應用：

[例 1] 正弦定律

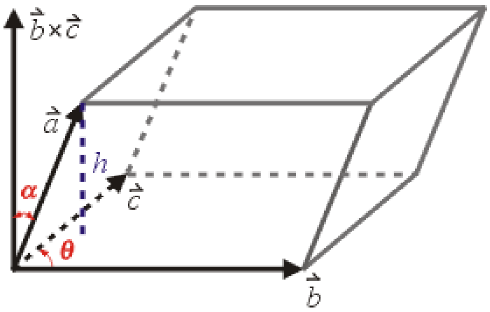
如下圖 $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$，故 $\vec{c}\times\vec{c}=\vec{c}\times(\vec{b}-\vec{a})$，即 $0=\vec{c}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{a}$，

故 $\vec{c}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$，從而 $|\vec{c}||\vec{b}|\sin\alpha=|\vec{c}||\vec{a}|\sin\beta$，因此 $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$。



[例 2] 平行六面體的體積

如下圖，$\vec{b}\times\vec{c}$ 垂直於底面，即 $\vec{b}$ 與 $\vec{c}$ 所生成的平面，其長 $|\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{b}||\vec{c}|\sin\theta$，也就是底面平行四邊形的面積，因此 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=|\vec{a}||\vec{b}\times\vec{c}|\cos\alpha$，而 $\vec{a}\cos\alpha$ 即爲高 h，故 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ 代表 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 三向量所張之平行六面體的體積。



若 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ ，$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ ，$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$ ，則

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\right)\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

又，由行列式的性質，易知 $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ 。

[例 3] 平行四邊形與三角形之面積

在例 2 中，若取 $\vec{a}$ 爲垂直於底面之單位向量，則平行六面體之體積，即底面平行四邊形之面積。因此，$\vec{b},\vec{c}$ 二向量所張之三角形面積，即爲此三重積 $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ 之半。例如，平面上三點 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$ 所形成之三角形面積可計算如下：取 $\vec{b}=\overline{P_1P_2}=\left(x_2-x_1\right)\vec{i}+\left(y_2-y_1\right)\vec{j}$，$\vec{c}=\overline{P_1P_3}=\left(x_2-x_1\right)\vec{i}+\left(y_2-y_1\right)\vec{j}$ ，而 $\vec{a}=\vec{k}$ ，則

$$\Delta P_1P_2P_3=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

[例 4] 平面方程式

設 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_1(x_2,y_2,z_2)$，$P_3(x_3,y_3,z_3)$ 爲空間中不共線三定點，$P(x,y,z)$爲空間中任一點，則 P_1,P_2,P_3 所決定之平面上，其充要條件爲 $\overline{P_1P},\overline{P_1P_2},\overline{P_1P_3}$ 所張之平面六面體之體積爲 0。換言之，

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

爲 P_1,P_2,P_3 所決定之平面方程式。

這個方程式還可以這樣看：

$$\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

與 $\overline{P_1P_2}$ 及 $\overline{P_1P_3}$ 皆垂直，故爲此一平面之一法線向量，而此面又通過 P_1 點，因此 $\overline{P_1P} \cdot \left(\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3}\right) = 0$ 。

前面我們引進了 $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ 這種純量值的三重積，現在我們考慮另一種向量值的三重積 $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ ，我們可以證明 $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)\vec{a}$ ，從而 Jacobi 恆等式立即得證：

$$\begin{aligned} &\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} + \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \times \vec{a} + \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \times \vec{b} \\ &= \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)\vec{a} + \left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right)\vec{c} - \left(\vec{c} \cdot \vec{a}\right)\vec{b} + \left(\vec{c} \cdot \vec{b}\right)\vec{a} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c} = 0 \end{aligned}$$

這個式子，我們自然可以將 $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ ，$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ ，$\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ 代入驗證。如果利用內積和外積的線性（分配律和混合結合律），當然簡化到只須檢查 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 爲坐標單位向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 就夠。然而機械式的演算，到底難以深刻地瞭解與記憶，因此，我們從另一個角度來分析。

假設 $\vec{a}, \vec{b}$ 爲二不平行的非零向量，則 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 皆正交，而 $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ 則又與 $\vec{a} \times \vec{b}$ 正交，因此必須與 $\vec{a}, \vec{b}$ 所張的平面平行，也就是說 $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ，又因 $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ 與 $\vec{c}$ 也正交，故 $x\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) + y\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) = 0$ 。

若 $\vec{c}$ 與 $\vec{a}, \vec{b}$ 皆不正交，則有

$$\frac{-}{\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)} = \frac{y}{\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)} = \lambda,$$

因此

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \lambda\left[\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)\vec{a}\right].$$

在 $\vec{b} = \vec{c}$ 的特別情況時，不難看出 $\lambda = 1$，也就是說 $\left(\vec{a} \times \vec{c}\right) \times \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{c} - \left(\vec{c} \cdot \vec{c}\right)\vec{a}$ ：因爲兩邊分別與 $\vec{a}$ 作內積，則得 $\left(\vec{a} \times \vec{c}\right) \times \vec{c} \cdot \vec{a} = \lambda\left[\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)^2 - \left(\vec{c} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{a} \cdot \vec{a}\right)\right]$ ；因此

$$\lambda\left[\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)^2 - |\vec{a}|^2|\vec{c}|^2\right] = \left(\vec{a} \times \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) = -|\vec{a} \times \vec{c}|^2,$$

即

$$-|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2 \cdot \sin^2\theta = \lambda\left(|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2\cos^2\theta - |\vec{a}|^2|\vec{c}|^2\right) = -\lambda|\vec{a}|^2|\vec{c}|^2\sin^2\theta.$$

從而 $\lambda = 1$ 。

至於一般情況，可將$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\lambda\left[\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}\right]$兩邊與$\vec{b}$作內積而得：

$$\begin{aligned}&\lambda\left[\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\right]\\&=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\cdot\vec{b}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\\&=\vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\right]=-\vec{a}\cdot\left[\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\times\vec{b}\right]\\&=-\vec{a}\left[\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\right]=\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\end{aligned}$$

故$\lambda=1$。

[例 5] 設$\vec{a},\vec{b}$爲二已知向量，且$\vec{a}\neq 0$而$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，又設c爲一已知實數，試求一向量$\vec{v}$，使其滿足$\vec{a}\cdot\vec{v}=c$。

[解]

設$\vec{v}$爲所求之向量，則$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{v}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{v}\right)\vec{a}-\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)\vec{v}=c\vec{a}-|\vec{a}|^2\,\vec{v}$，故$\vec{v}=\dfrac{1}{|\vec{a}|^2}\left(c\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}\right)$，代入檢驗，確實滿足。

2. 四元數

三維空間向量及其內積、外積之成爲數學物理的工具，大約從 19 世紀 80 年代初期開始，在此之前被普遍使用的，則是由 Hamilton 所創造的「四元數」。由於複數在平面上幾何及物理的有效應用，促使人們探索一種三維「複數」的工具。1843 年 Hamilton 創造了形如$a_0-a_1\vec{i}-a_2\vec{j}-a_3\vec{k}$的所謂四元數，其中$a_0,a_1,a_2,a_3$爲實數，$i,j,k$則扮演相當於複數中$i$的角色。

兩個四元數$a=a_0+a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$與$b=b_0+b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$的和，定義爲

$$\left(a_0+b_0\right)+\left(a_1+b_1\right)\vec{i}+\left(a_2+b_2\right)\vec{j}+\left(a_3+b_3\right)\vec{k}$$

至於乘積則由

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

與

$$ij=k=-ji,\ \ jk=i=-kj,\ \ ki=j=-ik$$

及分配律來定義，也就是說

$$\begin{aligned}ab=&\left(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3\right)+\left(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2\right)\vec{i}\\&+\left(a_0b_2-a_1b_3+a_2b_0+a_3b_1\right)\vec{j}+\left(a_0b_3+a_1b_2-a_2b_1+a_3b_0\right)\vec{k}\end{aligned}$$

我們可以驗證，加、減、乘、除四則運算對於四元數系照樣可行，就像在複數系中一般，只除了乘法交換律並不滿足。可除性較不明顯，但卻是相當重要的。若 $a = a_0 + a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ ，定義 $\bar{a} = a_0 + a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ 爲其共軛數，則 $a + \bar{a} = 2a_0$ 與 $a\bar{a} = \bar{a}a = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ 皆爲實數。令 $|a| = \left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 而稱之爲 a 之範數（絕對值）。顯然，若 $a \neq 0$ ，則，$|a|^{-2}\bar{a}$ 爲 a 之倒數。我們若仔細觀察四元數的乘積定義，不難發現向量的內積、外積隱含其中。若 $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ，我們稱 $\alpha = a_0$ 爲 a 之純量部分(實數部分)，$u = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ 爲 a 之向量部分(虛數部分)，當 $a = \alpha + u, b = \beta + v$ ，則 $ab = \alpha\beta + \alpha v + \beta u + uv$ ，$\alpha\beta$ 爲一純量，$\alpha v, \beta u$ 爲向量，然而 uv 是甚麼？

由乘積定義可知

$$uv = \left(a_1 i + a_2 j + a_3 k\right)\left(b_1 i + b_2 j + b_3 k\right) = -\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right) + \left[\left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right) i + \left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right) j + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) k\right]$$

正是 $-u \cdot v + u \times v$ ，因此 $\left(\alpha + u\right)\left(\beta + v\right) = \left(\alpha\beta - u \cdot v\right) + \left(\alpha v + \beta u + u \times v\right)$ 清楚地描述四元數的乘法。因爲乘法交換性的缺乏，使得四元數的運算顯得繁而難，以至於向量的內積、外積引進後，四元數就被人淡忘了。然而，四元數的可除性，卻是內積、外積所不及的，譬如說，例 5 的解答，雖簡短卻不容易。然而，就四元數的觀點而言，這個問題只不過是一元一次方程式 $\vec{a}\vec{v} = -c + \vec{b}$ 而已，我們可以立刻解得 $\vec{v} = \vec{a}^{-1}\left(-c + \vec{b}\right) = \dfrac{-\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\left(-c + \vec{b}\right) = \dfrac{1}{|\vec{a}|^2}\left(c\vec{a} - \vec{a} + \vec{b}\right)$ 。