

此零非彼0

在數學史上，0可以說是一個相當「年輕」的概念。如果我們拿它與地位相當的自然數來比較，則更是如此，不然的話，怎麼「從1到0」這一條路走得那麼曲折動人。

洪萬生

0 能不能作除數？

「0」能不能作「除數」？凡是曾經接觸中小學數學教師輔導或相關進修活動的人，應該都有「遭遇」此一問題的難忘經驗。究其原因，我想這是一般數學測驗卷中的典型問題，至於誰是始作俑者，恐怕也無從查起。無論如何，就讓我們一起來面對它吧。本文因而想說一點有關「0」的故事，看看我們如何來處理這個「零」頭。

首先，大家必須先認清一個事實，那就是：在數學上，0當然不能作除數！儘管它的確是一個數目，從還而擁有了參與「算術運算」的資格。

試想如果0可以充當「除

數」，那麼，任何數，譬如說2好了，它除以0，一定會得到一個數目。這就好比說5充當除數的話： $2/5 = 0.4$ ，其結果「0.4」是一個「確確實實的」數目。現在，如果0可以作除數，那麼2除以0的「結果」就是一個數目，就設它是確確實實的「某數」好了。如此一來， $\frac{2}{0} = \text{某數}$ ，於是，等號兩邊同時乘上0，就可得到 $2 = (\text{某數}) \times 0 = 0$ ，顯然矛盾！（蓋也）。當然，如果有人還要「拗」著說：上述的「某數」等於無限大「 ∞ 」，所以，是不是真的矛盾還很難說。好吧，即使這個（被暱稱為「懶惰的8」）「 ∞ 」可以視為一個數目，那麼，從 $\frac{2}{0}$ 我們還是可以推得： $2 = 0 \times \infty = 0$ ，仍然避免不了矛盾，除非0乘以任何數目可以不為0。

從1到0的歷程

在數學史上，0可以說是一個相當「年輕」的概念。如果我們拿它與地位相當的自然數來比較，則更是如此，不然的話，怎麼「從1到0」這一條路走得那麼曲折動人。對很多早期的人類文明來說，譬如古希臘哲學家畢達哥拉斯，數目1並不是數目，而是萬事萬物的根本，頗有一點「道生一」的味道。這種認知並非僅限於哲學家而已，古希臘的歐幾里德也不例外，他在《幾何原本》中所定義的「自然數」（或整數，whole number），就是從2開始的。後來，1雖然也被納入為自然數，但是，代表「全無」的0概念，畢竟很難從代表「全有」的

1 概念發展出來，希臘數學史就是最好的見證之一。平心而論，利用一個「有形的」實體（譬如「0」）去代表「沒有」或「空無」，的確是人類認知的一大躍進。試想我現在家裡如果「沒有」養寵物，那麼，我總不好說：我有「0」隻寵物在家。這或許也可以解釋：何以在十六世紀以前的數學文本中，我們幾乎找不到以「0」為答案的例題。

其實，代表「0」概念的記號，儘管在古巴比倫數學泥版中，曾經被用來填補不同位置數碼之間的「空位」，但是，它卻從來就不曾在最後一個數碼之後，因此，從「功能」的觀點來看，它是一個意義不完整的記號。不過，在他們的天文泥版中，楔形文字的零號，倒是發揮了今日位值中0號的作用，它不僅表示空位，也指示了數碼的位置。儘管如此，他們還沒有將零看作一個數目，也未曾將它與「空無」概念連結起來。一旦他們在數學運算中遭遇了零，譬如20減20，就不知道如何表達，只好寫道：「20減20，你看！」還有，在討論穀物分配時，如果沒有剩餘，則不用零號表示，而是寫著：「穀物已耗盡！」

另一方面，數學史上凡是利

用計算器來進行演算的例子，都會利用「空位」來表示那個位置的數碼付諸缺如。中國古代的計算器，例如早期的「算籌」以及後來的「算珠」（在珠算盤上操作），都不例外。在這種情形下，即使在宋元「天元術」（一種列代數方程式的方法）的「細草」中曾經出現「○」的記號，但由於它被用來當做填補算籌演算過程的數碼「空位」，所以，「0」概念的運算面向（operational aspect），在當時應該是尚未獲得呈顯才是。不過，一旦十三世紀中國數學家被認為開始使用「筆算」後得到證實，則當時中國人對於「0」的認知，或許就會變得比較成熟了。這是因為0概念的演化與筆算息息相關的緣故。

「零」說從頭

或許我們應該回顧一下更早的中國人如何認識「0」這個概念。「0」這個數目在中文中讀如「零」！然則這個漢字究竟有沒有「0」的概念呢？答案恐怕令人失望！根據《形音義綜合大字典》中的說明，甲骨文缺「零」字，它最早在「金文」中出現。就文字結構來說，它上從雨、下從令（美好），本意作「徐雨」解，意思是

說：「徐雨緩緩降落，澤潤萬物，固與急雨、驟雨之足以傷物、妨農有別，是有美好意，故零從令聲。」由此看來，它的漢字本義與「零丁」、「零落」、「零星」與「零碎」是連結在一起的，完全沒有「空無」的意思。

這應該可以解釋何以在《算數書》（公元前186年的漢初竹簡書）中，一個約分例題中的數目2016之「0」並未讀出：「二千一十六分之百六十二，約之百一十二分之九」。此外，漢代《九章算術》（南宋刻本）「商功章」中，也有「七萬六百六十六尺太半尺」一段文字，其中數目翻譯成阿拉伯數碼是為： $70666\frac{2}{3}$ （按太半是 $\frac{2}{3}$ 的意思）。由此可見，現在大家習慣地將（比如說）2016讀成「兩千零一十六」或「二千零一十六」，絕對不是從漢代以來就有的「約定俗成」。同時，像一、二、三、四、五、六、七、八與九，固然是當時通行的書寫用數碼（numeral）或數（目）字（number word），但是「零」卻不是！所以，「零」在古中國從開始就不是「數碼」或「數字」，也不代表任何數目概念，則是毫無疑問的！

根據數學史家嚴敦傑的研究，中國古書文獻都用□來表示，數字間的空位之使用同一記

號，看來順理成章。在書寫時，字體寫成行書，□方塊就變成圓圈○了。利用○來表示零，最早見於金代《大明曆》(1180)，其中有「四百○三」，相當於今日的403。到了十三世紀，南宋秦九韶《數書九章》(1247)與金元李冶《測圓海鏡》(1248)中，已經大量使用○了。至於中算史上明確地稱空位為零，則出現得很晚。同時，零作零頭解卻延續了好幾個世紀，譬如《丁巨算法》(1355)中的「今有麵一百七十二斤零二兩」，就是一個明顯的例證，因為一斤等於十六兩，所以，上述之「零」顯然指「零頭」的意思。此外，明代程大位《算法統宗》(1592)中的「韓信點兵」



李冶《測圓海鏡》(1248)書影，書中已使用到○。

題之「三數無零」，意思是三個、三個一數，恰好數盡而沒有零頭，同樣也未曾涉及0的概念。大約要到1980年代，由於西方算術傳入的影響，華蘅芳(1833-1902)在他的《學算筆談》(1882)中，明確地指出：「各位之數，既俱可用自一至九之數記之，則其空位當以零字記之，或作一圈以代零字亦可。」因此，他將「二○○八」讀作「二千零零八」，可見在數學的脈絡中，「零」已經不再是「零頭」的意思了。

可惜，華蘅芳在《學算筆談》中，並未進一步討論0是否作除數的問題。事實上，華蘅芳研讀過李善蘭(1811-1882)、偉烈亞力(Alexander Wylie)合譯的《代

數學》(原著為狄摩根(Augustus De Morgan)的 *Elements of Algebra*, 1859中譯出版)，並據以翻譯另一本影響深遠的西方代數學——《代數術》。而且，對於《代數學》的有關0的說明：「凡言數，兼整數分數，即○亦在內，乃指無數也」之後，作者很簡略地評論說：0不能作分母，這是因為 $\frac{6}{0}$ 就「如問六容幾個○。答曰：此問不合理。」他也一定

相當熟悉才是。然而，儘管《學算筆談》是他年少「困而學之」的忠實記錄，我們卻無從掌握更多資訊，以便研究當時學習0或其相關概念的一些認知特性。不過，晚清數學家似乎並未跟進討論此一問題。無論如何，此一問題值得我們長期關注，尤其是對於探索華人思維模式或中西文化交流的人來說，更是不容迴避。

印度人的0概念

十九世紀下半葉中國數學家對於0概念究竟掌握到甚麼程度，目前恐怕還很難下定論。不過，如果我們回顧一下印度人對於此一概念的討論，我們一定同意數學史家的論斷，那就是：印度人果然是0概念的發明者！在接下來的內文中，筆者會引述一些相關史實稍作說明。

根據史家研究，在印度數學史上，利用小圈表示10進位制記數法的零，最晚在公元876年已經出現。但是印度人對於零的最大貢獻，則是最先承認它是一個數，而不僅僅是空位或一無所有。這種看法早在第六世紀即已出現，當時的天文學家瓦拉哈米希拉(Varahamihira, 505-587)在他的著作中，對零進行了加減運

算。第七世紀，婆羅門笈多（Brahmagupta, 598 年出生）在他的著作《宇宙的開端》中指出：負數減去零是負數，正數減去零是正數，零減去零甚麼也沒有；零乘負數、正數或零都是零。……零除以零是空無一物，正數或負數除以零是一個以零為分母的分數。

這是印度人以零作除數的最早紀錄。後來的偉大數學家摩訶毘羅（Mahavira, 850 年）與婆什迦羅（Bhaskara, 1114-1185?），都企圖解決同一問題，可惜都功敗垂成。儘管如此，印度人最早視 0 為一個數目，殆無疑問。

在《從零開始》一書中，作者卡普蘭（Robert Kaplan）借用了「典範（paradigm）」概念，來表彰印度人對於 0 的演化之貢獻。同時，他也運用了一個「數目共和國」的比喻，說明 0 得以「入籍」為此共和國的一介公民的曲折與艱辛。此處，請容許我們引述他的說法：「數（目）共和國的特色在於，如果某物成為一個數（目），它就必須要能和現存的數（目）來往，至少要能和它們寒暄。它必須要能和其他數（目）以常見的方式結合。零如果要跟其他數（目）平起平坐，我們就必須瞭解如何用零來進行加減乘除的

運算：這正是古印度數學家所做的事。」結果，「他們促成了一種典範的重大轉移。」

事實上，這一個歷史解釋，也呼應了數學史家、數學教育家對於數學概念本質的考察成果。換句話說，像無理數 $\sqrt{2}$ ，虛數 $\sqrt{-1}$ ，乃至於 0 這一類「外來」概念，在取得數目共和國的身份證之前，通常都必須先與其他數目公民建立「運算」關係，直到磨合得這些「外來客」的「身份」變明朗時，才能通過入籍審查成為新公民。數學概念這種透過「關係」而確立「結構」的演化歷程，是非常具有啟蒙意義的比喻，值得我們好好地咀嚼與反思。

不過，婆什迦羅在他的著作《麗羅娃堤》（*Lilavati*, 1150）中，曾指出：「以零做分母，它是不會改變的。正像無限和永恆的神一樣，在創造與毀滅世界時雖然有眾多的創造物消失或產生，但是神始終不變！」這一段話，似乎預示了後來西歐數學家對於 0 與 ∞ 之間的糾纏關係。譬如說吧，十七世紀的英國偉大數學家華里士（John Wallis, 1616-1703）就曾經提出下列論證：當 $a > 0$ 時， $\frac{a}{0} = \infty$ ；同時，如果 $b < 0$ ， $\frac{a}{b} < 0$ 。茲令 $c = \frac{a}{b}$ ，則由於 $b < 0$ ，於是 $\frac{a}{0} < \frac{a}{b} = c$ ，所以， $+\infty$

$< c < 0$ 。顯然，這樣的謬誤所以出現，全都是因為將 0 當成除數的結果吧。

當然，西歐數學家如上述的華里士所以有機會熟悉印度阿拉伯數碼（包括 0），全都受惠於 1202 年斐波那契（Fibonacci）出版《計算書》（*Liber abaci*）所引進的結果。在本書中，斐波那契開宗明義就說：「九個印度數字為 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1。就像下文將要演示的，任意數目，都可以運用這些以及阿拉伯人稱作 zephir 的記號 0 寫出來。」誠然，在這一套筆算系統中，數碼（numeral）前所未有地被同時用來記數與運算。在那之後，這些數碼（以及演算法則）開始在西方流傳，直到 1600 年，它們已經演化成為現在的形式了。至於中國人接受印度-阿拉伯數碼及其（筆算）演算法則，則是二十世紀初的故事了；其實，這一套數碼在當時中小學教科書中的現身，也見證了中國數學教育的現代化。

結語

0 的故事看來真的非常曲折！不管是（記數用的）數碼（譬如楔形文字）中的空白、計算器（譬如珠算盤）中的空位，或是填

補空白的記號（如漢字書寫中的□或○），都不能算是接觸了0的概念。事實上，數字或只作記數用的數碼（譬如香港有一些百年商店仍然使用的蘇州暗碼），都不曾在這樣的脈絡中，參與實際的運算過程，因此，即使有代表所謂0的記號出現，當然也很難說它就代表了一個數目。更何況在「筆算」的脈絡中，既然任何數目都可以作為除數，那麼，0或其它相當的記號也不能例外，於是，在此一脈絡中的數學家，勢必面對0能否作除數的問題。正因為如此，數學史家才會審慎地斷定：在所有的古文明中，只有印度人發明了0概念。

最後，請容許我們再對筆算與0概念之密切關聯，提供一個現代的間接佐證：請在你的電子計算器上按下1除以0，一定發現結果是error！可見，即使是現代

先進的計算器，也無法處理0作除數的問題，更何況是古代流傳下來的計算器呢。由此看來，在一個長期仰賴計算器、甚至因而取得高度成就的中國傳統數學而言，與0概念失之交臂，一點都不令人意外！

因此，正如曾經任教中學的林炎全教授所指出：如果「你有學生或同學分不清：答案為0、沒有答案；或斜率為0、沒有斜率之間的區別嗎？如果有，一點都不要覺得奇怪，也不要覺得他們笨。他們只是把0和「沒有」之間黏太緊，還未把0抽象成為一個數。」至於其文化深層結構，或許此「零」非彼「0」故也！

參考資料

1. Sigler, L. E. tr.(2002), *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into*

Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. New York / Berlin / Heidelberg: Springer-Verlag.

2. 林炎全(2000)，〈0與沒有〉，《HPM 通訊》3(1): 7。
3. 高樹藩編纂、王修明校正(1980)，《正中形音義綜合大字典》，正中書局。
4. 梁宗巨(1992)，《數學歷史典故》，遼寧教育出版社。
5. 羅伯·卡普蘭(Robert Kaplan)(2002)，《從零開始》，究竟出版社。
6. 蘇意雯、蘇俊鴻、蘇惠玉、陳鳳珠、林倉億、黃清揚、葉吉海合撰(2000)，《算數書》校勘，《HPM 通訊》，第3卷第11期：2-20。
7. 華蘅芳(1882)，《學算筆談》。

洪萬生：任教師範大學數學系