乾嘉學派與圓徑周率

◎ 洪萬生／台灣師大數學系

乾嘉學派的算學研究活動，對十九世紀中國數學發展造成極深遠的影響。通過他們的輯失、校勘與考證等工作，失傳五百年之久的古算典籍《算經十書》，乃至宋金元四大家的傑出作品，才得以重見天日，並進一步成爲十九世紀中國數學家所憑仗的主要研究資源之一，更值得注意的，是「談天三友」：焦循（1763～1820 年）、汪萊（1768～1813 年）和李銳（1768～1817 年），在方程論和符號代數上的成就，爲中國傳統古算可以更新，留下了最優美的一個註腳！

乾嘉學派，醉心復古

不過，乾嘉學派的過度醉心復古，卻不可避免地在算學的認識上造成了一些局限，他們對汪萊的算學創新無法賦與恰當的評價，可以說是相當顯著的例證之一。由於汪萊的《衡齋算學》概以「西法」立論，而且多半無關「興復古學昌明中法」的宏旨，因此，汪萊被批評爲「尤於西學太深，雖極加駁斥，究未能出其範圍」，當然就很容易了解了。

有關汪萊與乾嘉學派的關係，史家劉鈍與筆者已經做過初步的探討，不想在此贅述。本文只是想利用「圓徑周率」這樣一個有趣的例子，再度證明乾嘉學派算學視野的盲點的確存在，於是，任何發現只要「闇合古人」，便被推許爲「至當不可易」了。

闇合古人，至當不易

這個例子發生在乾嘉學派大儒錢大昕、阮元以及傑出數學家李銳身上。錢大昕先是從《隋書律曆志》，獲知祖沖之的圓周率 π 值的估計：

> 「古之九數，圓周率三圓徑率一，其術疏舛，自劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗之徒，各設新率，未臻折衷。宋末南徐州從事史祖沖之更開密率，以圓徑一億爲一丈，圓周盈數三（刻本作二，誤）丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間，密率圓徑一百一十三，圓周三百五十五，約率圓徑七，周二十二。又設開差冪、開差立，兼以正圓參之，指要精密，算氏之最者也。」

以上引文抄錄在錢大昕的《十駕齋養新錄》卷第十七首條〈圓徑周率〉之中，可見他對

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

$$\pi \doteq \frac{22}{7}(\text{約率}), \pi \doteq \frac{355}{113}(\text{密率})$$

等對應事實，一點也不陌生。此外，他也知道法國傳教士杜德美(P. Jartoux)所傳入的 $\pi \doteq 3.14159265$ ：

「西洋人割圓六宗三要之說，窮極幽眇，所得徑一周三一四一五九二六五，正在沖之所定盈朒二數之間。世閱古今、地分中外，而布算若合符節，用以步天，宜若確乎不可易矣！」

儘管如此，錢大昕繼續說：

「予族子江寧教授塘（號溉亭）獨疑之，謂圓周曲線也，圓徑直線也，以各等邊線，用勾股法取其弦遞析之，愈析愈細，終無合無一 線之理，則所謂密率者，猶未密也。今試以木製大圓輪，其徑一丈，以長竹蔑刻尺寸分 秒度之，得實周三丈一尺六寸有奇，乃知沖之密率猶失之弱，蓋以直求曲，勢必不能密合，非算之不精，於理有未盡也。」

換句話說，錢塘實際度量大圓輪周長，得 π 值爲 3.16 有餘。然而，錢大昕竟然據以認定祖沖之的密率「猶失之弱」，更意外的，是他還獲得高徒李銳的支持：

「昨元和李生銳（字尚之）告予云：秦九韶《數學九章》卷三「環田三積問」，術以圓徑自乘進位爲實，開平方得周，設徑一億，依術推之，得周三億一千六百二十二萬七千七百六十六奇，與溉亭之說合，則古人已有先覺者。」

結果，學界「一時信之」，其原因顯然與李銳的態度息息相關；李銳身爲錢大昕高徒以及乾嘉學派最傑出算學家，他對 $\pi \doteq 3.16$ 的背書自然不可忽視。在《疇人傳》（1799 年，阮元掛名主編，但主筆是李銳）的「錢塘傳論」中，李銳明白地指出錢塘的 $\pi \doteq 3.16$「闇合古人」秦九韶，所以是「至當不可易」：

「圓周徑率，自劉徽、祖沖之以來，雖小有同異，大要皆徑一周三一四而已。溉亭獨創爲三一六之率，與諸家之說迥殊。余考秦九韶《數學九章》「環田三積術」，其求周以徑冪進位爲實，開方爲圓積，是九韶亦以三一六爲圓率，與溉亭所創率正同，蓋精思所到，闇合古人也。江寧談教諭秦，今之算學名家，嘗作一丈徑木板，以篾尺量其周，正得三丈一尺六寸奇，以爲溉李之說，至當不可易也。」

針對這樣的斷言，乾嘉學派的算學家似乎都不曾提出評論，有意見的，反倒是些熱衷西學的算學家，譬如曾任江蘇巡撫的徐有壬（1800～1860 年）即以「內容外切，反覆課之,其說遂破。」

有關徐有壬的這一辨駁，並未刻入現傳的《務民義齋算學》，上一段引文出自諸可寶撰著的《疇人傳三編》，但無法知道原始資料爲何。不過，稍早的董祐誠（1791～1823 年）已經發難在先了，在他的《董方立遺書》中，論文《圓徑求周辨》就是爲此目的而寫。

董祐誠犀利的一劍

董祐誠字方立，江蘇陽湖（今常州市）人，少年時工爲駢體文詞，繼通數理、輿地之學。晚清張之洞的《書目答問》（1875 年）曾把他歸類爲駢體文家和中西法兼用算學家。其實，我們光看他的算學著作如《割圜連比例圖解》（1819 年）、《堆垛求積術》、《橢圓求周術》和《斜弧三邊求角補術》（後三種都撰於 1821 年），即可斷定他比較熱衷西學。

董祐誠的《割圜連比例圖解》，是在北京友人朱鴻處見到明安圖的《割圜密率捷法》第一卷抄本以後，「反覆尋繹，究其立法之原」而寫成的。《割圜密率捷法》第一卷納入「西士杜德美圓徑求周諸術」，因此，董祐誠對於杜德美的 π 近似值當不陌生。然而，董祐誠在他的論文《圓徑求周辨》中，卻隻字不提杜德美，反倒是口口聲聲劉徽，利用劉徽的「割圓術」和它的改良形式「今割圓術」，來證明阮元、錢大昕、錢塘乃至李銳的謬誤！

在《圓徑求周辨》中，董祐誠開宗明義即稱：

「圜三徑一古法也。自魏劉徽以割圜求周，歷代因之，至今日而愈密，雖屢求勾股，十數位以降，不能無差，然三一四一五九二六之率，則無可疑者。」

接著，他引述阮元、李銳的「錢塘傳論」，並強調「以法考之，未敢信（錢氏之說）爲密率也。」這是因爲

「塘之言，曰圜割爲觚，名爲周而非周，且不能無所棄，有所棄，則非全數矣！」

至於

「劉徽之術止於內容九十六觚，而設圜徑爲二尺，忽以下直棄其餘，故其率失之少。」

另一方面，董祐誠也指出：

「今之割圜，則兼內容外切，用之至百億以上，內外之觚既同，則弧線亦不得不同。且設徑爲二兆，復有小餘二十七位，凡四十位，取數之密，無過此者。」

因此，

「謂徽術所求非圓周可也，謂今術所求非圓周不可也。謂徽術三一四以下率未密可也，謂徽術三一四當易爲三一六不可也。」

爲了強化他的辨駁，董祐誠按著提出具體的論證和計算：

「圜外切觚，觚內之弧必小於觚，此人所共知者。如設徑爲二兆，十乘開方，得周六兆三千二百四十五億五千五百三十二有奇，二十四析之，爲二千六百三十五億有奇，較今割圓術所求外切二十四觚之一，已多二億。夫二十四觚出於六觚，乘除僅三次耳。圓徑爲兆，則億下小餘尚有三十五位，三次乘除，而四十位下餘分之棄，即差至三十五位以上，此必無之理。而謂觚內之弧能大於外切之觚者，尤必無之理也。」

這兒董祐誠所謂的「今割圓術」，是指《數理精蘊》（清聖祖敕編）卷十五的內容。其中在處理下列問題：

「設如圓徑二兆，用外切六邊起算，問得圓周幾何？」

時，該書編者（主要梅轂成負責）算得：

「圓外二十四邊形之每一邊，爲二千六百三十三億零四百九十九萬五千一百七十四。（小餘七九一七○六九四三○五二九一四八一九四三四二○七一八四。）」

根據錢塘之說，如取直徑 $d = 2\times10^{12}$ ，則

$$\text{圓周}C = \sqrt{10d} \doteq 6324500005532,$$

再作二十四等分，得

$$\frac{C}{24} \doteq 263304995174.$$

這段弧長按理應小於「圓外二十四邊形之每一邊」L_{24} ，然而依據「今割圓術」，

$$L_{24} \doteq 263304995174.$$

因此，誠如董祐誠所注意到的，$C/24$ 較 L_{24}「已多二億」亦即「觚內之弧能大於外切之觚者，尤必無之理也。」

最後，董祐誠歸結道：

塘術既於理不通，則所謂徑丈之板，必未能合度，斯則輕改古經，惟憑私臆，無足取者。

塘又謂數以十成，而權衡獨以十六，即方圓之理。舍實象而求空言，亦數學中之遁辭矣。

這樣的批判，雖然只是針對錢塘而已，但殃及錢大昕、阮元、李銳乃至整個乾嘉學派，自是極有可能。可惜，由於我們無法知道《圓徑求周辨》的流傳情形，因此，它對乾嘉學派的損害程度，當然也無法估計。不過，我們也不要忘了從 1800 年開始，乾嘉學派似乎已經逐漸喪失它對中算研究的主導權。到了 1820 年代，以項名達爲首的西法派，已足以和乾嘉學派的算學家分庭抗禮了。在這種情況下，乾嘉學派對董祐誠這犀利的一劍，大概也無暇反擊了。

《續疇人傳》依然傳承乾嘉學派的立場

董祐誠於 1823 年歿於北京，同年冬天，他的兄長董基誠將他的遺著收集成《董方立遺書》出版。這部全集收入他的曆算稿五種，包括了《割圜連比例圖解》、《橢圓求周術》、《堆垛求積術》、《斜弧三邊求角補術》及《三統術衍補》。其中《割圜連比例圖解》和《堆垛求積術》都頗有貢獻，唯一美中不足的是他的《橢圓求周術》。由於「秀水朱先生鴻爲言圜柱斜剖則成橢圓，是可以勾股形求之」，於是，他仿照《九章算術》(勾股章)「葛生纏木」題

的解法，以圓柱半周爲勾，橢圓長、短軸平方之差爲股之平方，求弦得橢圓半周。如設 a,b 爲橢圓長、短半軸，p 爲周長，則董祐誠的公式相當於

$$p=\sqrt{4\pi^2b^2+16\left(a^2-b^2\right)}$$

由於他實際取 $\pi \doteq \dfrac{355}{113}$（祖沖之密率），所以，他寫出的公式相當於

$$p=\frac{1}{113}\sqrt{355^2\left(2b\right)^2+113^2\cdot 4^2\left(a^2-b^2\right)}$$

這個《橢圓求周術》顯然是錯誤的，後來項名達提出正確的公式，收入他自己的《象數一原》內。不過，針對董祐誠這個錯誤公式，羅士琳（1789～1853 年）——乾嘉學派算學傳統的最後重鎮——倒是明白地指出：

> 「於術不通，蓋葛生纏木，若使兩面對纏，其相交處必有角，故可借爲勾股形求之。而橢圓之形，則爲斜剖之圓柱，與葛纏者迥異，其受剖處無痕跡可尋，故能有合於長圓，而不能有合於勾股，以其相交處無角也。夫其相交處無角，則其形不同，其數必恆小於橢周，信非通法！」

羅士琳還特別強調：

> 「曩曾以此論告之其兄玉椒農部（基誠），乃農部既不知算，兼以友愛其弟，不忍湮沒其所著之書，堅不節去此術，致方立有遺憾，惜哉！」

這些評論當然都言之成理，不過，它們竟然占用了羅士琳所撰「董祐誠搜論」全幅的之四分之三，在剩下的四分之一中，羅士琳則僅推崇董祐誠之有志於研究曆術可與李銳並稱，「都有功於眾緯者也」，而對董祐誠在《割圜連比例圖解》和《堆垛求積術》上的成就，則未置一詞，至於《圓徑求周辨》一文，更不必論矣！

包括「董祐誠傳論」的《董祐誠傳》，載於羅士琳撰著的《續疇人傳》（1840 年）。這部傳記對西法派算學家的評價固然稍有折衷，但主要風格仍與阮元、李銳的《疇人傳》一致。也就是說，它仍然維持了乾嘉學派的基本立場。在這種情況下，羅士琳對董祐誠的評論，似乎在不言之中了。