圓 與 π

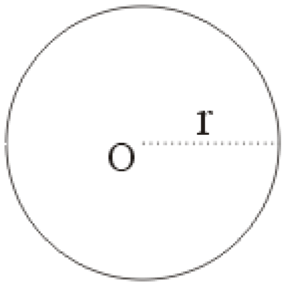
◎蔡聰明／台灣大學數學系

圓的周長與面積公式，從小學、中學的數學到大學的微積分，一直都沒有處理好，要不就是語焉不詳，就是繞圈子。本文我們尋求一種不繞圈子的嚴格講法。

大家在小學的時候都學過兩個著名的公式：

$$\text{圓的周長 } L = 2\pi r \text{ ，圓的面積 } A = \pi r^2$$

其中 r 為圓的半徑，π 為圓周率或單位圓的面積，並且 $\pi \doteq 3.1416$（參考圖一）。



圖一

這兩個公式是怎麼來的呢？由於要說清楚並不容易，所以老師與課本就採用先背下來「不知亦能行」的策略，一切訴諸直觀，把道理推給將來再去解說。但是，我們查遍國中與高中的數學課本，都找不到蹤跡，甚至大一的微積分課本也不談，即使談了也語焉不詳或繞圈子 (vicious circle)。這個「怎麼來」的問題，涉及極限概念與實數系的完備性，果然有點兒深奧，值得我們仔細探索一遍。

圓的周長

按照知識發展的常理，我們對於事物的認識是，先從直觀經驗開始，再歸納或猜出規律，最後提出證明而完成。

(一) 直觀的經驗與猜測

由生活實踐，對於圓人類很早就認識到「周三徑一」的事實。透過實驗的辦法，度量各種大小不同的圓之周長與直徑，發現圓周與直徑的比值似乎是一個定數，跟圓的大小無關，令這個比值為 π_1，從而猜知：

$$A = (\cos x, \sin x), \quad A' = (\cos(x+h), \sin(x+h))$$

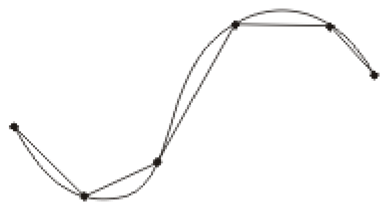
對於小學生來說，這裡有一個很好的數學實驗：度量各種大小與質料皆不同的圓之周長 L 與直徑 D，施以四則運算，列成表格：

L	D	L+D	L-D	L $\times D$	L $\div D$
21.3	6.8	28.1	14.5	144.84	3.132
25.6	8.1	33.7	17.5	207.36	3.160
16.2	5.1	21.3	11.1	82.62	3.176
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

這個實驗有許多好處：練習實地度量，認識度量會伴隨誤差，磨練計算與系統地列表，主動地找尋規律。

(二) 嚴格的論證

考慮圓內接（或外切）正 n 邊形，當 n 越大時，越接近於圓。因此，圓周長應該就是圓內接（或外切）正 n 邊形的周界長在 $n\to\infty$ 時的極限值。換言之，圓可以看成是無窮多邊的正多邊形，每一邊都是無窮小(infinitesimal)。對於一般的曲線，我們也採用同樣的方法來定義它的長度。如圖二，給一條曲線，我們在其上取有限多個點，連成折線，計算折線的長度。令所取的點之個數趨近於無窮大並且每一小段都趨近於 0，如果折線的長度存在有極限值，那麼這個極限就定義爲曲線的長度。當極限值不存在時，曲線的長度就沒有定義。



圖二

因此，曲線長，特別地，圓周長的存在性並不是天經地義的，而是需要證明的。下面我們就來做這件工作。

令 U_n 與 L_n 分別表示圓的外切與內接正 n 邊形的周界長，那麼顯然有

$$L_3 < L_4 < \cdots < L_n < \cdots U_n < \cdots < U_4 < U_3$$

我們的目標是要證明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(U_n - L_n\right) = 0$

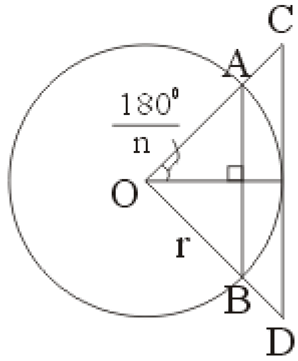
爲此，我們採用阿基米得(Archimedes)的辦法，由圓內接正六邊形出發（因爲最容易作圖），然後逐次加倍邊數。我們仍然有

$$L_6 < L_{6\times 2} < \cdots < L_{6\times 2^n} < \cdots < U_{6\times 2^n} < \cdots < U_{6\times 2} < U_6$$

【補題 1】

（i）$U_{2n} = \dfrac{2L_nU_n}{L_n + U_n}$，$L_{2n} = \sqrt{L_nU_{2n}}$

（ii）$U_{2n} - L_{2n} < \dfrac{1}{2}\left(U_n - L_n\right)$



圖三

【證明】

（i）在圖三中，AB 與 CD 分別表示圓內接與圓外切正 n 邊形的一邊，則

$$U_n = 2nr\tan\frac{180^\circ}{n},\quad L_n = 2nr\sin\frac{180^\circ}{n}$$

利用正切函數的定義及倍角公式，很容易證得

$$\frac{2L_nU_n}{L_n+U_n} = U_{2n} \quad \text{與} \quad L_nU_{2n} = L_{2n}^2$$

（ii）由 $L_n < U_{2n}$ 與算數平均大於等於調和平均可得

$$\begin{aligned} U_{2n} - L_{2n} &= \frac{2L_nU_n}{L_n+U_n} - \sqrt{L_nU_{2n}} \\ &< \frac{L_n+U_n}{2} - \sqrt{L_nL_n} = \frac{L_n+U_n}{2} - L_n = \frac{1}{2}\left(U_n - L_n\right) \end{aligned}$$

反覆利用【補題 1】的（ii）可得

$$0 < U_{6\times 2^n} - L_{6\times 2^n} < \frac{1}{2^n}\left(U_6 - L_6\right)$$

從而

$$\lim_{n\to\infty}\left(U_n - L_n\right) = 0$$

由實數系的完備性（區間套原理，the nested intervals principle）可知下面兩極限存在且相等

$$\lim_{n\to\infty}U_n = \lim_{n\to\infty}L_n$$

這個共同的極限值，我們就定義它爲圓周長。

【定理 1】設兩個圓的直徑分別爲 d_1 與 d_2 ，圓周長分別爲 C_1 與 C_2 ，則

$$\frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2}$$

【證明】

設 L_n 與 S_n 分別爲兩個圓內接正 n 邊形的周界長，由相似三角形定理知 $\dfrac{L_n}{d_1} = \dfrac{S_n}{d_2}$ 。

因爲

$$\lim_{n\to\infty} L_n = C_1, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = C_2$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{d_1} = \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{d_2}$$

亦即

$$\frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2}$$

因此，圓周長與直徑的比值爲一個普遍的常數，跟圓的大小無關，記此常數爲π_1。今若一個圓的周長爲C，直徑爲d，半徑爲r，則$C = \pi_1 d = 2\pi_1 r$這就是圓的周長公式。

圓的面積

有了圓周長的公式，我們就可以採用弧度制來度量角的大小並且定義三角函數，進一步有

【補題 2】$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

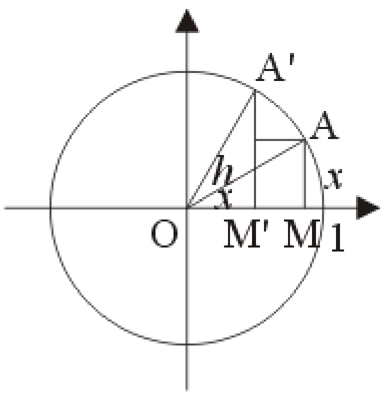
【證明】

由 L'Hospital 規則

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

這裡所用到的微分公式$D\sin x = \cos x$，一般的微積分教科書都利用【補題 2】來推導，這就是繞圈子。爲了避開繞圈子，我們改採如下的論證法：如圖四，考慮單位圓上兩點A與A'，並且

$$A = (\cos x, \sin x), \quad A' = (\cos(x+h), \sin(x+h))$$



圖四

過 A 點作水平線交 $A'M'$ 於 B 點，於是

$$A'B=\sin\left(x+h\right)-\sin x$$

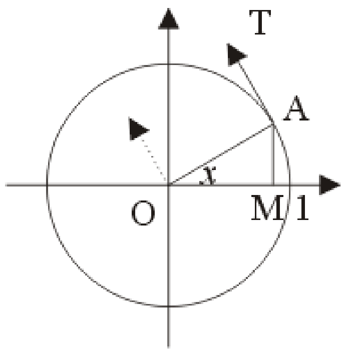
$$\frac{\sin\left(x+h\right)-\sin x}{h}=\frac{A'B}{AA'}\cdot\frac{AA'}{h}$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+h\right)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{AB'}{AA'}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{AA'}{h}$$

顯然 $\lim_{h\to 0}\frac{AA'}{h}=1$ ，但是 $\lim_{h\to 0}\frac{AB'}{AA'}=$ ？

當 A' 趨近於 A 時，割線 $A'A$ 趨近於過 A 點的切線，而圓的切線與半徑垂直，參見圖五。



圖五

切線 AT 與水平線 AB（或 x 軸）的交角爲 $x+\frac{x_1}{2}$ ，因此

$$\lim_{h\to 0}\frac{AB'}{AA'}=\sin\left(x+\frac{\pi_1}{2}\right)=\cos x$$

從而

$$d\sin x=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+h\right)-\sin x}{h}=\cos x$$

【注意】！通常的微積分教科書採用不等式

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x}$$

與夾擊原理來證明【補題 2】，但是此地我們不能這樣做，因爲不等式之推導，要用到還未出現的圓面積公式。

今考慮半徑爲 r 的圓，令 A_n 與 B_n 分別表示圓內接與圓外切正 n 邊形的面積，再令 $a_n=A_{6\times 2^n}$，$b_n=B_{6\times 2^n}$ 則顯然有

$$a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots b_2<b_1<b_0$$

並且

$$a_n=6\times 2^n r^2\sin\frac{\pi_1}{6\times 2^n}\cos\frac{\pi_1}{6\times 2^n},\quad b_n=6\times 2^n r^2\tan\frac{\pi_1}{6\times 2^n}$$

利用【補題 2】，很容易就得到

【補題 3】$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

由實數系的完備性知，下限兩個極限存在且相等

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

這個共同的極限值就定義爲圓的面積。

【注意】！由【補題 2】，我們可以直接求得 $\lim_{n\to\infty} a_n = \pi_1$，$r^2 = \lim_{n\to\infty} b_n$ 而得到圓的面積公式。但是，我們不走此路線，寧可走傳統歷史的道路。

我們都知道，兩個相似三角形的面積之比等於對應邊平方之比。同理，因爲任何兩個圓皆相似，故兩個圓面積之比就等於相應的半徑平方之比。

【定理 2】設兩個圓的半徑爲 r_1 與 r_2，面積分別爲 A_1 與 A_2，則有 $\frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2}{r_2^2}$

【證明】

令 $A_n^{(1)}$ 與 $A_n^{(2)}$ 分別表示兩個圓的內接正邊形的面積，則

$$\lim_{n\to\infty} A_n^{(1)} = A_1 \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} A_n^{(2)} = A_2$$

由相似三角形的面積比之定理知

$$\frac{A_n^{(1)}}{r_1^2} = \frac{A_n^{(2)}}{r_2^2}$$

於是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n^{(1)}}{r_1^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n^{(2)}}{r_2^2}$$

從而

$$\frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2}{r_2^2}$$

【注意】！在數學史上，由於阿基米得沒有極限工具可用，所以他採用窮盡法(method of exhaustion)與兩次的歸謬法(double reductio ad absurdum)來證明【定理 2】。

根據【定理 2】，圓的面積與半徑平方的比值爲一個普遍的常數，跟圓的大小無關，記此常數爲 π_2。因此，若一個圓的半徑爲 r，則其面積爲 $A = \pi_2 r^2$ 這個就是圓的面積公式。

我們注意到，通常微積分教科書上，利用積分 $4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ 來求算圓的面積，這犯了繞圈子的毛病。

圓的周長與面積的關係

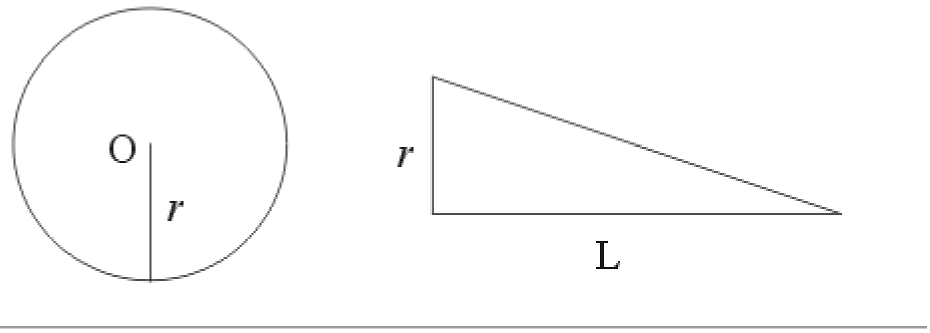
考慮半徑爲 r 的圓，根據上述的論證，我們得到圓的周長與面積公式分別爲 $L = 2\pi_1 r$，$A = \pi_2 r^2$ 這裡出現了兩個普遍常數 π_1 與 π_2，它們有沒有關係呢？事實上，圓的面積等於圖六直角三角形的面積，直角三角形的底邊爲圓周長 L，垂直邊爲半徑 r。

【定理 3】(阿基米得定理)：$A = \frac{1}{2} rL$

【推論】： $\pi_1 = \pi_2$

令此共同值爲 π ，這是尤拉(Euler)在 1737 年首次引入的記號。換言之，圓周長比直徑等於圓面積比半徑平方，這個比值記爲 π 。因此，圓的周長與面積公式分別爲

$$L = 2\pi r,\quad A = \pi r^2$$



圖六

上述【定理 3】的公式 $A = \frac{1}{2} rL$ 是兩面刃：

（i） 若 $L = 2\pi r$ ，則 $A = \pi r^2$

（ii） 若 $A = \pi r^2$ ，則 $L = 2\pi r$

亦即求得 L 與 A 的任何一個公式就可求得另一個公式。

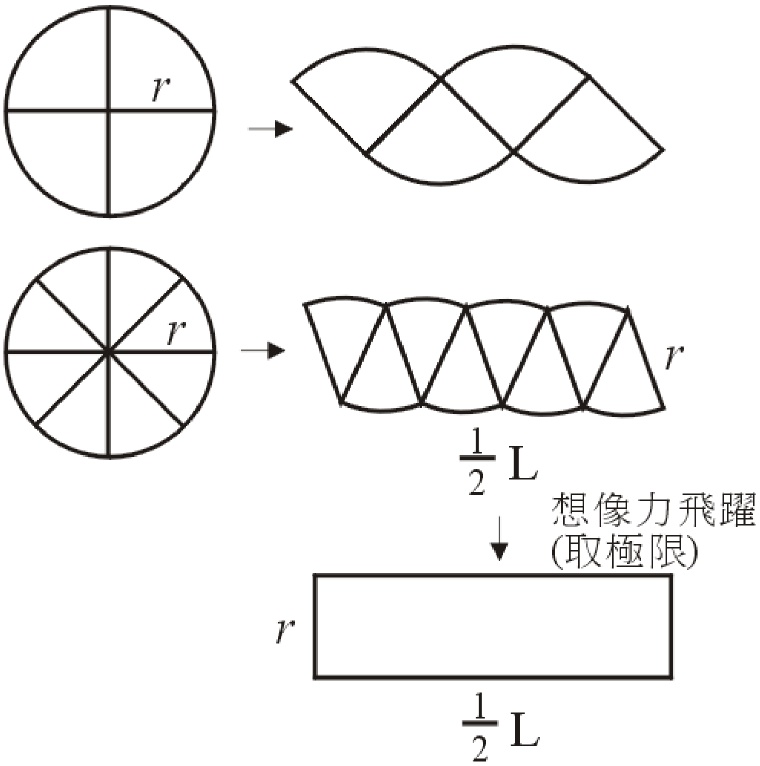
關於【定理 3】的證明，阿基米得仍然是採用窮盡法與兩次歸謬法。下面我們提出四種美妙的重組與極限的論證法。

(一) 重組成矩形

如圖七，我們可以想像，當分割越來越細時，經過重組後的圖形越來越接近於長方形，最後終於變成長方形，長爲圓周長之半 $\frac{1}{2}L$ ，寬爲半徑 r 。因此，圓的面積爲

$$A = \frac{1}{2} rL \qquad (2)$$

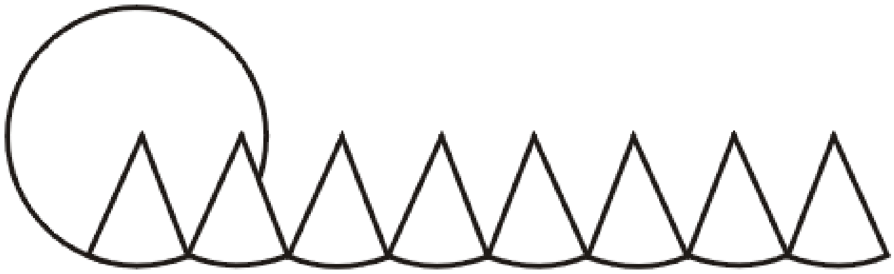
上述分割重組的圖解也是小學生數學勞作的好題材。



圖七

(二) 拆解成三角形

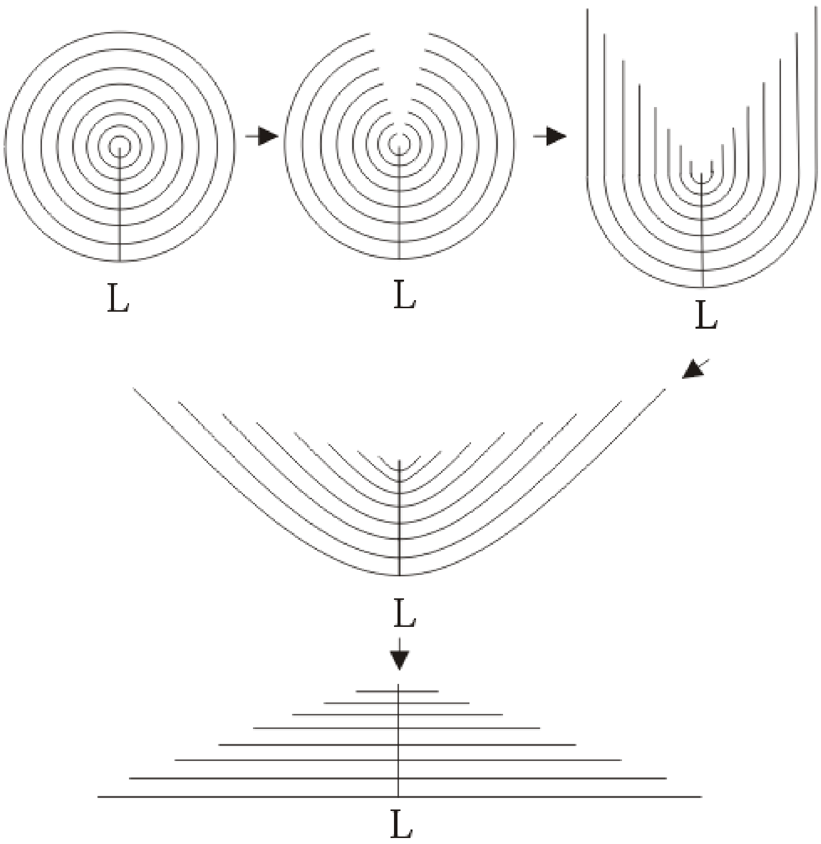
如圖八，當分割越來越細時，三角形的底邊越來越小，連結再一起的底邊終究遍成一直線，其長度為圓周長L，高為半徑r，於是得證(2)式。



圖八

(三) 沿半徑割開重組三角形

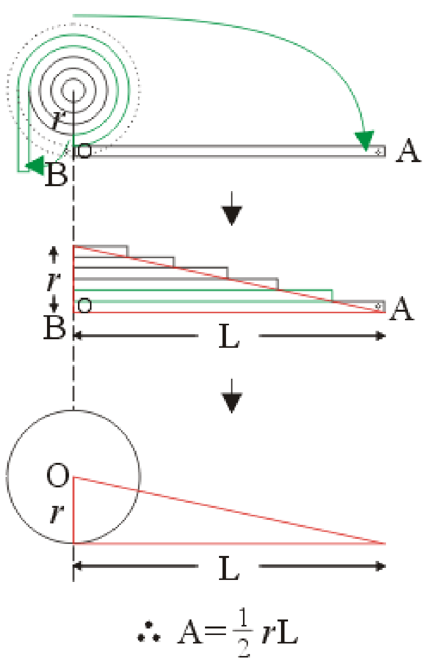
我們再換個圖解的方式，也可以得到(2)式，如圖九。



圖九

(四) 重組三角形

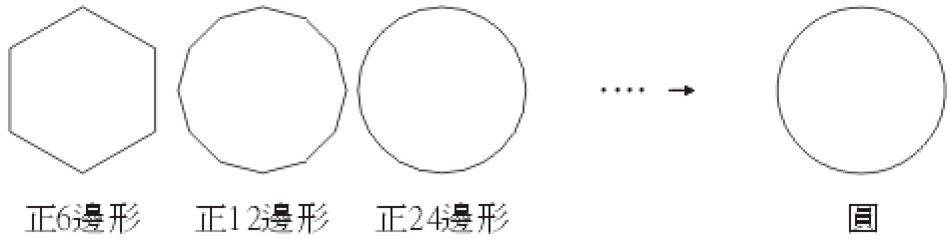
下面的圖解（圖十）也很有意思，值得參考：



圖十

古希臘數學家是一批非常講究「邏輯證明」的人，對於上述的直觀圖形之論證並不滿意，因此，他們提出窮盡法，並且用兩次歸謬法嚴格地證明(2)式。

事實上，現在我們所採用的論證法是極限操作，再配合圓可以看成是無窮多邊的正多邊形，參見圖十一。極限論證法是從古希臘方法精練出來的，更加簡便與好用，而且整個微積分可以建立在極限論證法上面（也可以採用無窮小論證法）。



圖十一

微積分的發明

微積分的發展從古希臘時代就已經開始，到了十七世紀牛頓(Newton)與萊布尼茲(Leibniz)才真正發明微積分，其間約經二千年的醞釀。牛頓與萊布尼茲最主要的突破是看出微分與積分的互逆性：

$$D\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (3)$$

$$\int_a^x DF(t)dt = F(x) - F(a) \qquad (4)$$

這件事情其實在牛頓與萊布尼茲之前已經出現過許多線索，好像是浮在海面上冰山的一角，例如：

(一) 圓的面積與周長

$$A(r) = \pi r^2 \quad \downarrow \text{ 微分}$$
$$L(r) = 2\pi r \quad \uparrow \text{ 積分}$$

其中 $A(r) = \int_0^r L(t)\,dt$ 恰好就是圖九的圖解，而 $L(r) = \frac{d}{dr}A(r)$ 。

(二) 球的體積與表面積

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \downarrow \text{ 微分}$$
$$L(r) = 4\pi r^2 \quad \uparrow \text{ 積分}$$

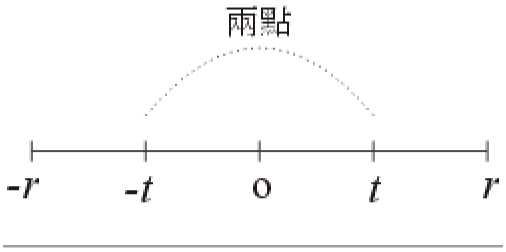
(三) Galileo 的自由落體定律

$$S(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad \downarrow \text{ 微分}$$
$$V(t) = gt \quad \uparrow \text{ 積分}$$

但是，在牛頓與萊布尼茲之前，沒有人讀出這些結果的深意，到了牛頓與萊布尼茲的手上，

他們才首次由「冰山的一角」發現整座的冰山，亦即這些結果對一般的函數也都成立，並且發展出一套有效的演算法則。他們見微知著，因而創造出微積分。

事實上，我們也可採取「以退為進」的論證法。考慮一維球的特例，這就是閉區間$\left[-r,r\right]$，於是有圖十二：



圖十二

$$\text{區間長度}L\left(r\right)=\int_0^r 2dt = 2\int_0^r dt = 2r \quad \downarrow \quad \text{微分}$$

$$\frac{dL}{dr}=2 \qquad\qquad \uparrow \quad \text{積分}$$

其中

$$\int_0^r dt = t\Big|_0^r = r-0=r \tag{5}$$

叫做完美的積分公式(the perfect integral formula)。

其次，將(5)式中的恆等函數$F(t)=t$推廣成一般的函數$F(t)$也成立：

$$\int_0^r dF(t) = F(t)\Big|_a^b = F(b)-F(a) \tag{6}$$

特別地，若$f(t)dt = dF(t)$，則

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b dF(t) = F(b)-F(a) \tag{7}$$

就是著名的 Newton-Leibniz 公式。

結語

天文學是數學的故鄉與發源地。古人仰頭觀察星空，除了激起無限的神秘感之外，還從中得到點、線、面、體、幾何圖形以及形數(figurate numbers)的概念。

太陽與滿月是圓形的。古希臘人認為圓是最對稱且最漂亮的平面圖形，所以在「不朽的天空」中，行星以圓形軌道繞地球運行（地靜說）。

星空與四季的變化，讓人深刻體會到大自然有規律，特別地，事物有規律可尋，這是科學與數學的先決條件。歐式幾何所討論的圖形侷限於由直線所圍成的直線形（如三角形、多邊形）以及圓。按照亞里斯多德「有機目的觀」的物理學,直線與圓分別對應地上物體與天上行星的「自然運動」之軌道。

人類文明的發展，跟圓具有密切的關係，各種輪子是圓形的。人類很早就對於圓產生興趣，並且發現到圓的周長與面積的規律（公式）。神奇 π 涉及到太多方面的數學與大自然的奧秘，對於它的追尋所得結果，簡直是可以「車載斗量」。因此，De Morgan 說：「π 進入人間的每一扇門，每一戶窗，且降臨到每一家煙囪中。」